

ECO L1

Les mathématiques,
au service de l'économie ?

Regards sur les maths

Pour plus de clarté

Pour un langage universel

Pour mesurer les phénomènes

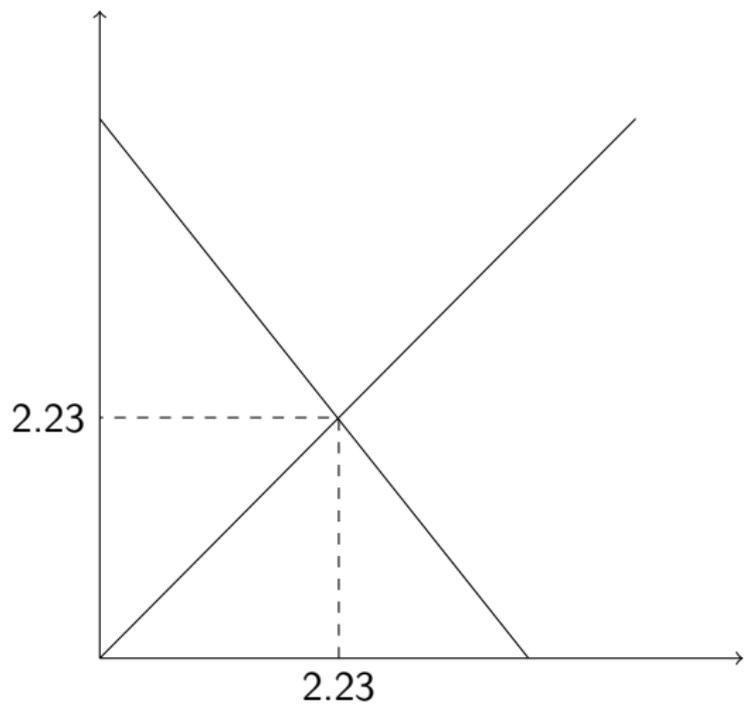
Mais ... la difficulté de la
résolution ne doit jamais
masquer l'économie du
problème, les questions qui se
posent.

PLAN DE LA CONFERENCE

- La culture Les mathématiques élémentaires
- "Ceteris paribus"
 - approximations linéaires
 - économétrie
 - dérivées partielles
- Le comportement individuel rationnel Techniques et théorèmes de Maximisation individuelle
- Calcul de l'équilibre
 - Théorème de la valeur intermédiaire,
 - Résolution de système de plusieurs équations à plusieurs inconnues
 - Algèbre (espace vectoriels - dimensions)
 - Equations différentielles
 - Analyse avancée
- Economie publique (éco du bien-être)
 - Calcul de surfaces
 - intégration, théorie de la mesure
- Probabilités, convexité

Les mathématiques élémentaires

- ▶ Tracer la droite qui passe par le point $(0,0)$ et par le point $(5,5)$
- ▶ Tracer la droite qui passe par le point $(0,5)$ et par le point $(4,0)$
- ▶ Quelle est l'intersection de ces deux droites, quelle est la pente de chacune de ces droites



Les dérivées d'une variable

C - - - - - E

Interprétation Le coût d'une firme dépend du nombre de biens qu'elle produit. Par exemple $C(q) = q^2$.

- ▶ Quelles sont les propriétés de cette fonction.
- ▶ Si le pdg décide d'augmenter sa production de ε , de combien va augmenter son coût ?
- ▶ Quelle notion suggérez vous de définir ?

Commenter la formule

$$F(x + \varepsilon) = F(x) + 3,7\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Quel est le graphique correspondant ?

Econométrie ?

Les dérivées partielles d'une fonction

Dans l'analyse économique, il apparaît que les fonctions dépendent de plusieurs variables. Plus l'analyse est riche, plus il y aura de variable.

Pour comprendre le rôle de chacune des variables, on étudie comment la variation d'une variable, prise isolément, influence la fonction.

Exemple Si la demande de bien est $X = X(R, p, p^s)$ où R désigne le revenu du ménage, p , le prix du bien, et p^s , on calcule l'influence de ces variables, en étudiant

- 1) le SIGNE,
 - 2) la VALEUR,
- des dérivées partielles

c-a-d, ici, $\frac{\partial X}{\partial R}$, $\frac{\partial X}{\partial p}$, $\frac{\partial X}{\partial p^s}$.

AN $X = R \frac{1 + p^s}{2 + p}$ (voir aussi l'exemple $X = R \frac{1 + p}{2 + p^s}$)

Comportements rationnels

Définition : L'économie est une science humaine qui s'intéresse à l'homme, mais à un certain aspect de l'homme, l'homme en tant qu'il a des comportements humains, rationnels et efficaces.

L'agent économique a des *objectifs* qu'il poursuit, mais, il doit les poursuivre étant donné un ensemble de *contraintes* définies par son environnement. Ces contraintes **(1)** limitent ses choix et **(2)** rendent ses choix sensibles à toute *modification de l'environnement économique*

Programme

Dans les analyses économiques, le comportement de l'agent économique est représenté à travers le type de programme suivant :

maximiser un objectif chiffré
tout en respectant des contraintes

l'objectif chiffré, c'est, par exemple, pour une entreprise, le profit. Les contraintes, dans ce cas, ce sont des contraintes technologiques.

Exemples de maximisation

- ▶ x, y étant des nombres positifs, trouver le maximum possible de la quantité $x + y$ sachant que $x^2y \leq 8$.
- ▶ x, y étant des nombres positifs, trouver le minimum possible de la quantité $x + y$ sachant que $x^2y \geq 8$.
- ▶ Une firme produit une quantité q d'un bien et le vend au prix p . Pour produire cette quantité q , elle doit dépenser \sqrt{q} [la production n'est pas linéaire]. Déterminer la production optimale de la firme. Déterminer la taille optimale de la firme.

Solutions des exemples précédents

- Le programme diverge. Il suffit de prendre $y = 0$ et x aussi grand que l'on veut.
- Le programme a la solution $x = 2 * 2^{\frac{1}{3}}$, $y = 2^{\frac{1}{3}}$.
- Le profit de la firme est la fonction $\pi(q) = pq - \sqrt{q}$ dont la dérivée $\pi'(q) = p - \frac{1}{2\sqrt{q}}$ s'annule pour $q = \left(\frac{1}{2p}\right)^2$

Méthodes et analyse

Remarquer qu'il ne s'agit pas simplement de savoir résoudre des problèmes,

Il s'agit d'en comprendre les contours,

Ici par exemple, dans un problème de maximisation, la compréhension de la nature des contraintes est par elle même parfois aussi importante que de savoir calculer la solution d'un problème.

Les mathématiques de l'équilibre

Théorème de la valeur intermédiaire : si une fonction d'une variable et continue a des valeurs positives et des valeurs négatives, alors il existe une variable pour laquelle cette fonction est nulle.

Application à l'équilibre partiel Soit un marché caractérisé par la fonction de demande suivante : $D(p) = 100 - p$ et par la fonction d'offre $S(p) = p$. Il existe un prix qui équilibre ce marché.

En effet, si on considère la fonction $D(p) - S(p)$. En zéro, elle vaut : 100. En 80 elle vaut $20 - 80 = -60$. Donc on sait qu'il y a un équilibre entre 0 et 80

L'équilibre est ici en $p = 50, q = 50$

Noter la très grande différence entre l'économiste qui sait qualifier l'existence d'une solution, du mathématicien appliqué, uniquement capable d'exhiber la solution $p = 50$.

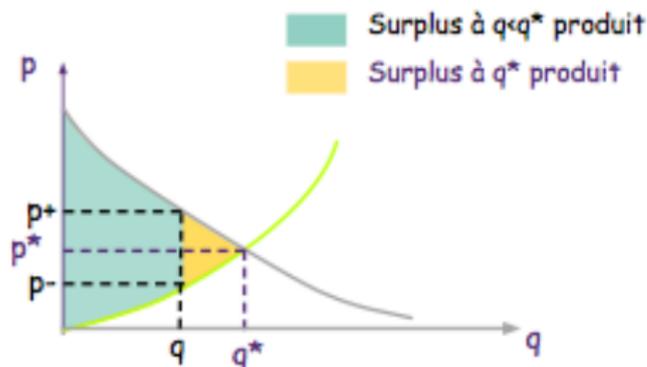
II - 5

Maximum du surplus net global

Représentons la somme des surplus des producteurs et des consommateurs dans un espace quantité-prix. On représente les cas $q < q^*$ et $q = q^*$.

Pour une quantité q produite et achetée (en dehors de l'équilibre) le surplus est indépendant du prix auquel se sont faites les transactions.

Pour tout prix compris entre p_- et p_+ les q unités produites seront achetées, ni plus ni moins.



Proposition : sur le marché d'un bien caractérisé par une fonction d'offre et une fonction de demande, le surplus global de l'économie est maximum pour l'allocation d'équilibre $q = q^*$.

Pour finir

Y a t'il de très bons mathématiciens chez les économiste qui publient : OUI

Mais parfois des très mauvais