Quand faut-il simultanément taxer certaines énergies et en subventionner d'autres ?

Michel Moreaux
Toulouse School of Economics
(IDEI et LERNA)
(Co-auteur : Jean-Pierre Amigues
Assistance technique : Valérie Nowaczyk)

Paris, 5 mars 2009

PLAN

I – Introduction

II – Le modèle

III – La contrainte de mix énergétique doit être satisfaite *ab initio*

IV – La contrainte de mix énergétique ne doit être satisfaite qu'à partir d'une certaine date $T > 0$

V – Cas d'une montée en régime progressive vers le mix énergétique visé à terme

VI – Les conséquences d'un progrès technique exogène dans la production de l'énergie renouvelable

VII – Les conséquences d'un effet d'apprentissage dans la production de l'énergie renouvelable

VIII – Dynamique comparative

I – Introduction

De nombreuses politiques énergétiques prennent la forme d'une contrainte sur la composition de l'offre d'énergie, à respecter à partir d'une certaine date.

L'objectif est de réduire les émissions de gaz à effet de serre.

Les énergies renouvelables sont des énergies propres contrairement aux énergies carbonées fossiles dont l'usage est à l'origine de ces émissions.

Le problème est que ces énergies propres sont généralement plus coûteuses que les énergies carbonées fossiles. Le fonctionnement du marché impose que pour les usagers le prix de l'énergie soit indépendant de son origine. Sinon ils demanderont l'énergie la moins chère.

Dans la présente étude on prend comme donnée la contrainte sur la composition du bouquet énergétique. Compte tenu de cette contrainte on détermine ensuite le sentier optimal de consommation des deux formes d'énergie et on montre qu'il faut :

- non seulement subventionner l'énergie renouvelable, la plus coûteuse
- mais aussi taxer l'énergie non renouvelable, la moins coûteuse

et ce jusqu'à épuisement de l'énergie non renouvelable c'est-à-dire jusqu'au moment auquel la société n'utilisera plus que la seule énergie renouvelable.

On montre également que dans un modèle stationnaire, c’est-à-dire dans un modèle où :

- la fonction de demande d’énergie des usagers au cours du temps reste la même à chaque instant
- les coûts des deux types d’énergies, non renouvelable et renouvelable, sont constants au cours du temps,

alors la trajectoire de la consommation d’énergie renouvelable n’est pas monotone.

Cette consommation devient positive à partir du moment où la contrainte doit être respectée.

Elle décroît pendant toute la période au cours de laquelle les deux types d’énergies doivent être simultanément utilisés.

Elle s’accroît à nouveau à la date à laquelle l’énergie non renouvelable est épuisée.

On montre aussi qu’à la date à laquelle la contrainte doit être respectée le sentier de prix doit faire un saut vers le haut.

L’étude est organisée comme suit :

Le modèle est exposé à la section II suivante.

On étudie d’abord le cas dans lequel la contrainte doit toujours être respectée.

On examine ensuite le cas dans lequel cette contrainte ne doit prendre effet qu’à une certaine date future.

Enfin on passe en revue ce en quoi d’autres hypothèses concernant les coûts, pourraient infléchir certaines conclusions.

II – Le modèle

- Considérons une économie dans laquelle les besoins en énergie peuvent être satisfaits par deux types de ressources :

  - une ressource non renouvelable polluante,

  - une ressource renouvelable non polluante ou ressource « propre »,

chacune étant un substitut parfait de l'autre pour les usagers, pour autant que les coûts de mise à disposition des dits usagers aient été supportés.

- Ressource non renouvelable

On note :

$X(t)$ stock en terre à la date *t*, mesuré en unités d'énergie utilisable par l'usager

X^0 avoir initial : $X(0) \equiv X^0$

$x(t)$ taux d'exploitation instantané de la ressource à la date *t*, encore appelé taux d'extraction instantané :

$$\dot{X}(t) = \frac{dX}{dt} = -x(t) \quad , \quad t \geq 0$$

f coût moyen de mise à disposition de l'usager, de l'énergie non renouvelable

On suppose que f est constant, c'est-à-dire :

- indépendant de t
- indépendant de $x(t)$
- indépendant de $X(t)$

de sorte que le coût total de mise à disposition des usagers d'un flux $x(t)$ à la date *t*, noté *F*, a pour expression :

$$F\left(x(t)\right) = f \cdot x(t) \quad , \quad \forall\, x(t) > 0 \quad , \quad \forall\, X(t) > 0 \quad , \quad \forall\, t \geq 0$$

- Ressource renouvelable

$y(t)$ taux d'exploitation instantané de la ressource renouvelable à la date *t*, mesuré en unités d'énergie utilisable par l'usager

g coût moyen de mise à disposition de l'usager, de l'énergie renouvelable

On suppose que g est constant, c'est-à-dire :

- indépendant de *t*
- indépendant de $y(t)$

de sorte que le coût total de mise à disposition des usagers d'un flux $y(t)$ à la date *t*, que l'on note *G*, a pour expression :

$$G\big(y(t)\big) = g \cdot y(t) \quad , \quad \forall\, y(t) \geq 0 \quad , \quad \forall\, t \geq 0$$

Remarque 1

Pour que les deux sources d'énergies soient parfaitement substituables l'une à l'autre pour les usagers, il faut que les coûts comprennent tout ce qui est nécessaire à leur mise à la disposition des dits usagers : production, transport, transformation, etc…, ce que nous supposons.

Compte tenu des conventions de mesure des flux $x(t)$ et $y(t)$, et du stock $X(t)$, tous mesurés en unités d'énergie utilisable par les usagers, on peut alors définir la consommation totale d'énergie, que l'on note $q(t)$, comme la somme des consommations $x(t)$ et $y(t)$:

$$q(t) = x(t) + y(t).$$

Remarque 2

Pour que la ressource non renouvelable soit utilisée, il faut que son coût soit inférieur au coût de la ressource renouvelable, i.e. :

$$f < g$$

ce que nous supposons.

- La politique énergétique spécifie que, dans la consommation totale d'énergie, $q = x + y$, le pourcentage de la consommation d'énergie propre *y* ne doit pas être inférieur à un certain minimum que l'on notera $\zeta, \zeta \in (0,1)$ dans ce qui suit.

Ce minimum résulte de compromis politiques au sens large, quelque peu autonomes de la sphère purement économique, sinon le « mix » énergétique serait endogène comme dans de nombreux modèles qui tiennent compte explicitement des dommages causés par un recours souvent jugé excessif aux énergies non renouvelables polluantes.

Ce minimum prend donc la forme suivante :

$$\frac{y}{x+y} \geq \zeta \quad \Rightarrow \quad \alpha y - x \geq 0$$

où :

$$\alpha = \frac{1-\zeta}{\zeta}$$

La relative autonomie du politique s'impose à ceux qui sont en charge de la détermination des trajectoires optimales de consommation des ressources.

- Supposons que les effets pervers de l'usage de la ressource non renouvelable puissent être ramenés à la seule prise en compte de la contrainte sur le *mix* énergétique.

Convenons alors de noter $u(q)$ le surplus permis par une consommation d'énergie égale à *q* et supposons que la fonction *u* vérifie les conditions habituelles suivantes :

$$u(q) > 0 \text{ si } q > 0, u'(q) = \frac{du}{dq} > 0\,, u''(q) = \frac{d^2u}{dq^2} < 0\,,$$

$$\lim_{q\downarrow 0} u'(q) = +\infty \text{ et } \lim_{q\infty} u'(q) = 0$$

Supposons aussi que le taux d'actualisation social soit constant et égal à $\rho, \rho > 0$.

Le problème d'un planificateur social qui ne devrait prendre en compte les externalités négatives induites par la consommation d'énergie non renouvelable polluante que via la contrainte de consommation d'une proportion minimale d'énergie renouvelable propre est un problème de maximisation de la somme des surplus nets actualisés au taux ρ soumis à la contrainte $\alpha y - x \geq 0$.

- La contrainte peut prendre plusieurs formes :

- devoir être respectée depuis la date *t = 0*

- ne devoir être respectée qu'à partir d'une date $T > 0$

- devoir obéir à une certaine forme de montée en régime sur un intervalle de temps (T_1, T_2), c'est-à-dire être de la forme :

$$\zeta(t)\begin{cases} = 0 & t \in [0, T_1] \\ \in (0,1) & t \in (T_1, T_2) \\ = \bar{\zeta} & t \in [T_2, +\infty) \end{cases}$$

où $\zeta(t)$ est une fonction strictement croissante et différentiable sur l'intervalle (T_1, T_2) : $\dfrac{d\zeta}{dt} > 0 \quad , \quad t \in (T_1, T_2), \lim_{t \downarrow T_1} \zeta(t) = 0$ et $\lim_{t \uparrow T_2} \zeta(t) = \bar{\zeta}$.

III – La contrainte doit être satisfaite ab initio.
Cas $\zeta(t) = \zeta \in (0,1), t \geq 0$

Examinons d'abord le cas dans lequel $\zeta(t)$ est une certaine constante $\zeta \in (0,1)$, $t \in [0,\infty)$, c'est-à-dire le cas dans lequel la proportion d'énergie renouvelable doit être en permanence au moins égale à ζ.

Le problème du planificateur social est alors le problème *(P)* suivant :

$$(P) \max_{\{(x(t),y(t)),\, t\geq 0\}} \int_0^\infty \left\{u\left(x(t)+y(t)\right) - f\cdot x(t) - g\cdot y(t)\right\} e^{-\rho t} dt \qquad (1)$$

$$\dot{X}(t) = -x(t),\ X(0) = X^0 > 0 \text{ donné} \qquad (2)$$

$$\alpha\, \mathrm{y}(\mathrm{t}) - x(t) \geq 0 \qquad (3)$$

$$x(t) \geq 0 \text{ et } y(t) \geq 0 \qquad (4)$$

Le Lagrangien du problème, en valeur courante, a pour expression :

$$L = u\left(x(t) + y(t)\right) - f\,x(t) - g\,y(t) - \lambda(t)\,x(t) + \nu(t)\left[\alpha y(t) - x(t)\right]$$
$$+ \gamma_x(t)\,x(t) + \gamma_y(t)\,y(t)$$

où

$\lambda(t)$ est la variable adjointe à la variable d'état $X(t), \lambda(t) \geq 0$

$\nu(t)$ est le multiplicateur associé à la contrainte d'énergie mix, $\nu(t) \geq 0$

$\gamma_x(t)$ et $\gamma_y(t)$ sont les multiplicateurs associés respectivement aux contraintes de non-négativité de $x(t)$ et $y(t)$, $\gamma_x(t) \geq 0$ et $\gamma_y(t) \geq 0$.

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'\big(x(t)+y(t)\big) = f + \lambda(t) + \nu(t) - \gamma_x(t) \qquad , \quad t \geq 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'\big(x(t)+y(t)\big) = g - \alpha\nu(t) - \gamma_x(t) \qquad , \quad t \geq 0 \qquad (6)$$

avec les conditions d'écarts complémentaires suivantes :

$$\nu(t) \geq 0\,, \quad \alpha y(t) - x(t) \geq 0 \text{ et } \nu(t)\big[\alpha y(t) - x(t)\big] = 0 \qquad , \quad t \geq 0 \qquad (7)$$

$$\gamma_x(t) \geq 0\,, \quad x(t) \geq 0 \text{ et } \gamma_x(\mathrm{t})\,x(t) = 0 \qquad , \quad t \geq 0 \qquad (8)$$

$$\gamma_y(t) \geq 0\,, \quad y(t) \geq 0 \text{ et } \gamma_{\mathrm{y}}(t)\,y(t) = 0 \qquad , \quad t \geq 0 \qquad (9)$$

La dynamique de la variable adjointe $\lambda(t)$ doit vérifier :

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial L}{\partial X} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \lambda_0 e^{\rho t} \quad , \qquad t \geq 0 \qquad (10)$$

$$\text{où } \lambda_0 \equiv \lambda(0)$$

Enfin la condition de transversalité a pour expression :

$$\lim_{t \uparrow \infty} e^{-\rho t} \lambda(t) X(t) = \lambda_0 \lim_{t \uparrow \infty} X(t) = 0 \qquad (11)$$

Remarque 3

Supposons que, à la date *t* :

- les deux ressources sont simultanément exploitées de sorte que $\gamma_x(t) = 0$ et $\gamma_y(t) = 0$

- la contrainte de mix minimal n'est pas effective, de sorte que $\nu(t) = 0$

On déduit alors des conditions (5) et (6) et de la condition (10) que :

$$f + \lambda_0 e^{\rho t} = g$$

Puisque $g > f$, cette équation

- ne peut jamais être vérifiée si $\lambda_0 > g - f$
- ne peut être vérifiée qu'en :

$$t = \frac{1}{\rho}\left[\ln\left(g - f\right) - \ln \lambda_0\right] \quad , \text{ si } \lambda_0 \in \left(0, g - f\right)$$

On conclut que, le long du sentier optimal, il n'existe pas de phase, d'intervalle de temps de mesure non nulle, pendant laquelle les deux ressources seraient utilisées et la contrainte de mix minimal ne serait pas effective : si les deux ressources sont utilisées la contrainte de mix minimal est liante.

Remarque 4

Supposons que, à la date *t* :

- les deux ressources sont simultanément exploitées de sorte que $\gamma_x(t) = 0$ et $\gamma_y(t) = 0$

- la contrainte de mix minimal est effective

On déduit alors des conditions (5) et (6) et de la condition (10) que :

$$\nu(t) = \frac{1}{1+\alpha}\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] = \zeta\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] \qquad (11)$$

Puisque $\nu(t) \geq 0,$ ceci n'est possible que si :

$$\lambda_0 \in (0, g - f)$$

sur un intervalle de temps se terminant en $t_y(\lambda_0)$:

$$t_y(\lambda_0) = \frac{1}{\rho}\left[\ln(g - f) - \ln \lambda_0\right] \qquad (12)$$

On remarquera que sur cet intervalle, on doit avoir :

$$\dot{\nu}(t) = -\zeta \lambda_0 e^{\rho t} \quad < 0$$

La taxe unitaire décroît ainsi que la subvention.

Remarque 5

Supposons que la seule ressource utilisée est la ressource renouvelable. Alors $\gamma_y(t)=0$ et $\nu(t)=0$. La condition de premier ordre (6) devient :

$$u'(y)=g$$

On notera $\tilde{y}$ la solution de cette équation.

Le flux $\tilde{y}$ est le flux optimal de consommation de la ressource renouvelable dès que la ressource non renouvelable est épuisée.

Solution

Puisque le coût moyen (marginal) de la ressource non renouvelable est inférieur à celui de la ressource renouvelable, la ressource non renouvelable doit être exploitée autant que faire se peut.

Les Remarques 3 et 4 ci-dessus impliquent qu'il ne peut exister que deux types de phases le long du sentier optimal :

- une phase durant laquelle les deux ressources sont simultanément exploitées et la contrainte est active
- une phase durant laquelle seule la ressource renouvelable est exploitée

L'actualisation implique que la ressource la moins coûteuse doit être exploitée en priorité autant que possible. C'est une conséquence immédiate de la minimisation de la somme des coûts actualisés.

Puisque par hypothèse il n'est pas permis que la seule ressource utilisée soit la ressource non renouvelable, on conclut que si cette dernière doit être exploitée le sentier optimal est un sentier composé :

- d'une première phase $\left[0, t_y\left(\lambda_0\right)\right)$ au cours de laquelle les deux ressources sont simultanément exploitées et la contrainte sur le mix énergétique est effective

- d'une seconde phase $\left[t_y\left(\lambda_0\right), +\infty\right)$ au cours de laquelle seule la ressource renouvelable approvisionne les besoins

Au cours de la première phase le surplus brut marginal de la consommation d'énergie doit être égal à $f + \lambda_0 e^{\rho t} + \nu(t)$ (cf. condition (5)) ou indifféremment par $g - \alpha \nu(t)$ (cf. condition (6)), $\nu(t)$ étant donné par (11) ci-dessus.

Partons de la condition (5) et de l'expression (11) de $\nu(t)$. On doit avoir :

$$u'(q(t)) = f + \lambda_0 e^{\rho t} + \nu(t) = f + \lambda_0 e^{\rho t} + \zeta\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] \qquad (13)$$

c'est-à-dire :

$$u'(q(t)) = \zeta g + (1-\zeta) f + (1-\zeta)\lambda_0 e^{\rho t} \qquad (14)$$

Le membre droit de l'équation (14), $\zeta g + (1-\zeta)\left[f + \lambda_0 e^{\rho t} \right]$, est le coût marginal complet d'une unité de « mix » énergétique, unité de mix qui comprend :

- ζ unité de ressource renouvelable dont le coût marginal s'élève à g
- $(1-\zeta)$ unité de ressource non renouvelable dont le coût marginal complet s'élève à $f + \lambda_0 e^{\rho t}$

C'est ce coût marginal du mix qui doit être imposé aux usagers pour qu'ils prennent les bonnes décisions de consommation d'énergie.

Maintenant différentions (14) par rapport au temps :

$$\dot{u}'\left(q\left(t\right)\right) = \rho\left(1-\zeta\right)\lambda_0 e^{\rho t} \;>\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{p}\left(t\right) > 0 \qquad (15)$$

où

$$\dot{u}'\left(q\left(t\right)\right) = u''\left(q\left(t\right)\right)\dot{q}\left(t\right)$$

d'où

$$\dot{q}\left(t\right) = \frac{\rho\left(1-\zeta\right)\lambda_0 e^{\rho t}}{u''\left(q\left(t\right)\right)} \quad < 0 \quad , \quad t \in \left[0, t_y\left(\lambda_0\right)\right) \qquad (16)$$

Au cours de la première phase :

- la consommation totale d’énergie doit décroître

et puisque la contrainte de mix énergétique est effective :

- la consommation d’énergie non renouvelable doit décroître comme dans tous les modèles d’usage optimal d’une ressource non renouvelable, disons comme dans tous les modèles « à la Hotelling »,

mais et c’est l’aspect un peu surprenant du présent modèle :

- la consommation d’énergie renouvelable propre doit aussi décroître, ce qui n’est pas le résultat habituel de la plupart des modèles, mais est une conséquence immédiate de la contrainte qui pèse sur la composition du bouquet énergétique.

A la date $t_y(\lambda_0)$ définie en (12) :

$$\nu\left(t_y(\lambda_0)\right) = 0$$

ou de façon équivalente :

$$f + \lambda_0 e^{\rho t_y(\lambda_0)} = g$$

A cette date $t_y(\lambda_0)$, le coût marginal complet de la ressource non renouvelable augmenté de la taxe, $f + \lambda_0 e^{\rho t} + \nu(t)$, égal au coût marginal de la ressource renouvelable après déduction de la subvention, $g - \alpha\nu(t)$, est égal au seul coût marginal monétaire de la ressource renouvelable g. La taxe $\nu(t)$ par unité de ressource non renouvelable utilisée disparaît ainsi que la subvention, $\alpha\nu(t)$, donnée par unité de ressource renouvelable.

A cette même date $t_y(\lambda_0)$ la consommation totale d'énergie doit être continue et on doit avoir $q(t_y(\lambda_0)) = \tilde{y}$. Mais :

- juste avant cette date, la consommation d'énergie renouvelable est à peu près égale à $\zeta\tilde{y}$,

et

- juste après cette date, cette même consommation est égale à $\tilde{y}$.

La consommation de ressource renouvelable, après avoir décru au cours de la phase initiale $\left[0, t_y\left(\lambda_0\right)\right)$, doit donc faire alors un saut vers le haut en $t_y\left(\lambda_0\right)$, de $\zeta\tilde{y}$ à $\tilde{y}$, niveau auquel elle s'établit définitivement.

Le sentier prix de prix ou de surplus marginal brut optimal est illustré à la Figure 1 ci-dessous.

Les sentiers de consommation optimale des deux ressources sont illustrés à la Figure 2.

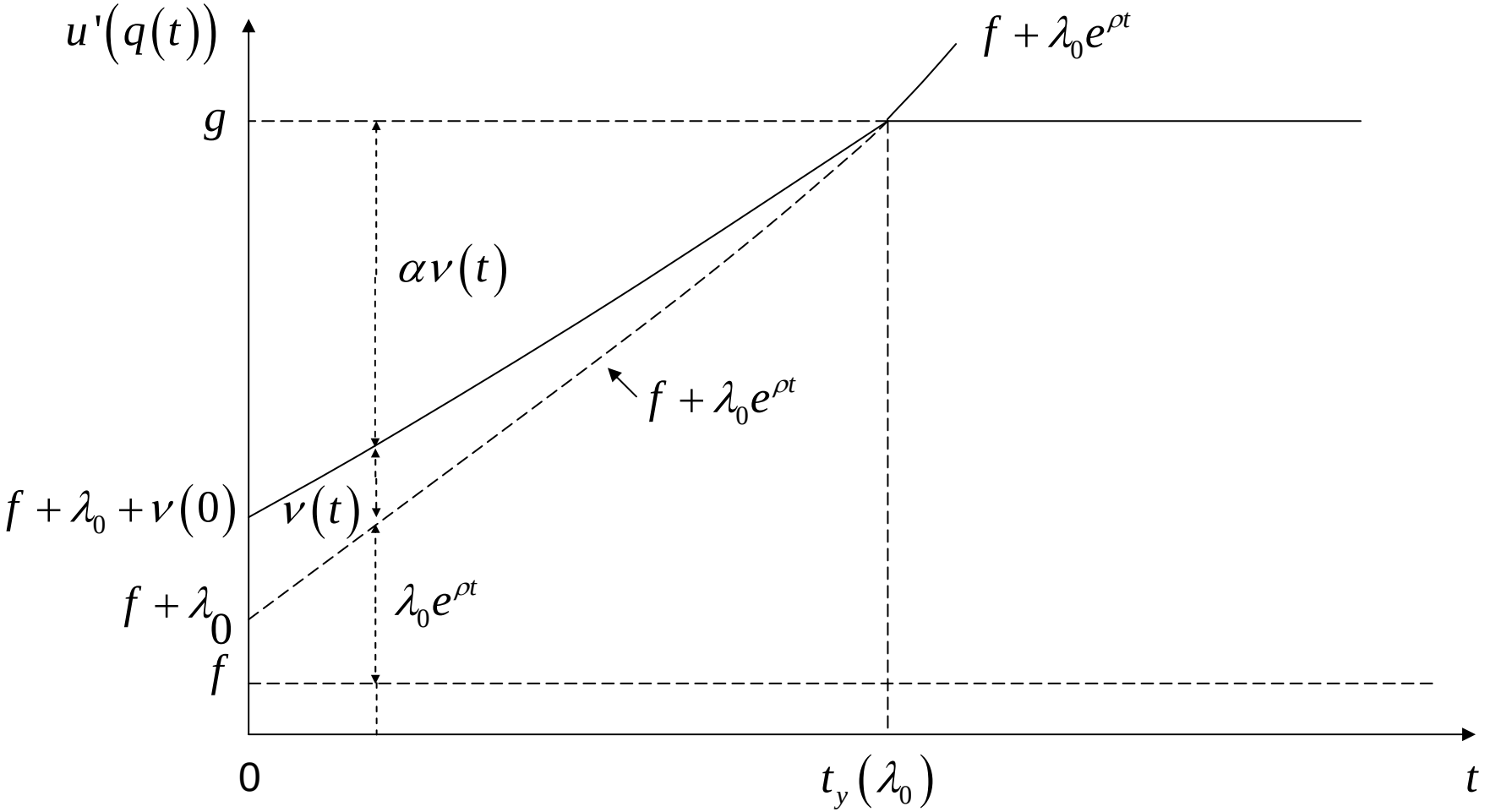


Figure 1 : Surplus marginal brut optimal. Cas $\zeta(t)=\zeta\in(0,1), t>0$

$\nu(t)$ taxe unitaire par unité de ressource renouvelable consommée

$\alpha\nu(t)$ subvention par unité de ressource renouvelable consommée

$\lambda_0 e^{\rho t}$ rente unitaire de la ressource non renouvelable

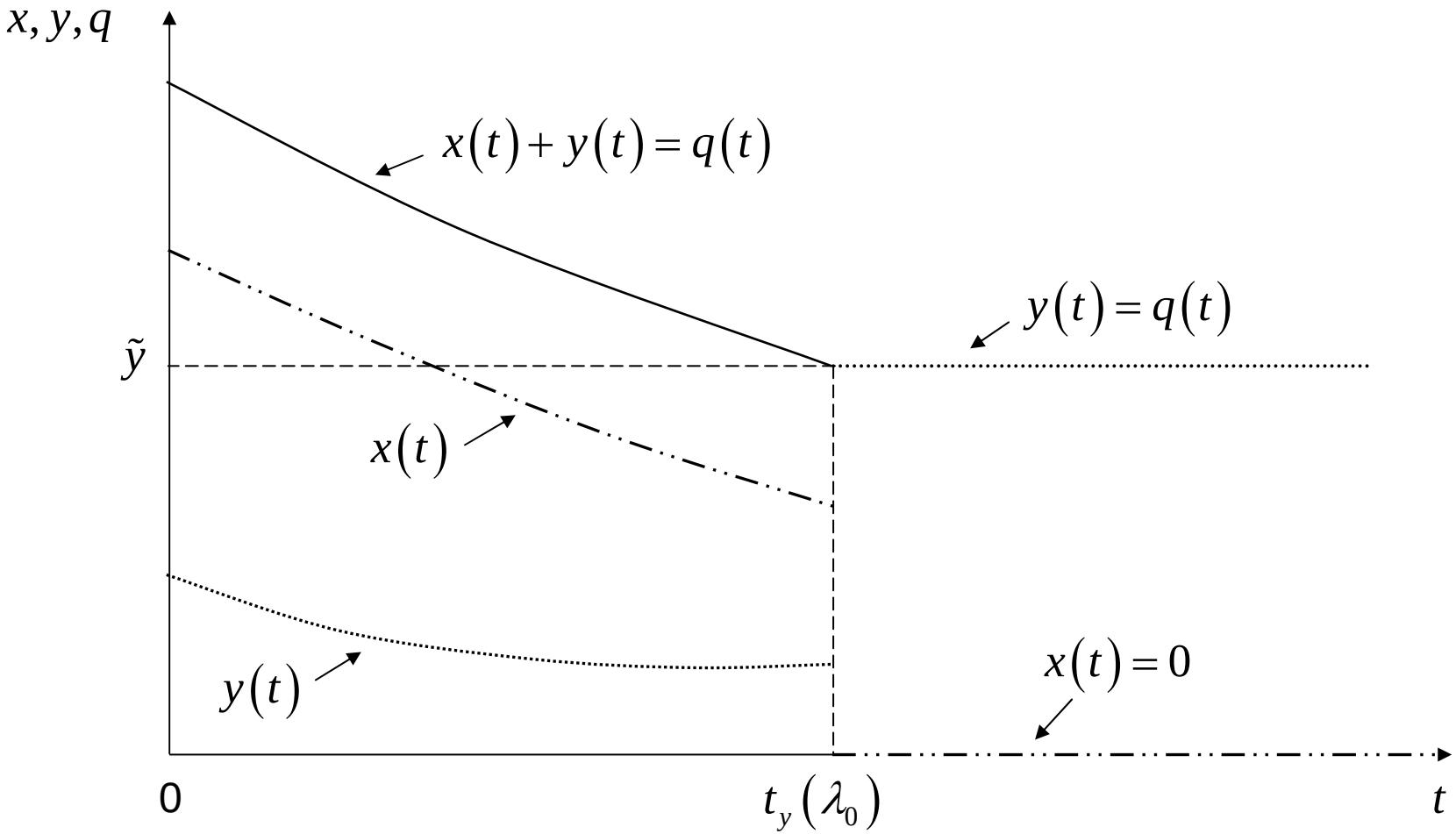


Figure 2 : Sentiers optimaux des consommations d'énergie.
Cas $\zeta(t)=\zeta\in(0,1), t\geq 0$

La seule variable endogène à déterminer est la valeur optimale de λ_0.

Une fois cette valeur connue, on connaît $t_y(\lambda_0)$ par (12), $\nu(\mathrm{t})$, $0 \le t < t_y(\lambda_0)$ par (11) et $q(t)$ soit par (5) soit par (6).

En différentiant $t_y(\lambda_0) = \frac{1}{\rho}\left[\ln(g-f) - \ln\lambda_0\right]$, on obtient :

$$\frac{dt_y}{d\lambda_0} = -\frac{1}{\rho\lambda_0} < 0 \quad , \quad \lim_{\lambda_0 \downarrow 0} t_y(\lambda_0) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda_0 \uparrow g-f} t_y(\lambda_0) = 0$$

En différentiant la condition de 1er ordre (14) :

$$u'\left(q(t)\right) = \zeta g + (1-\zeta)\left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)$$

qui doit être vérifiée au cours de la première phase, on obtient, en notant $q(t,\lambda_0)$ la valeur de q pour laquelle elle est satisfaite :

$$\frac{\partial q(t,\lambda_0)}{\partial \lambda_0} = \frac{(1-\zeta)e^{\rho t}}{u''\left(q(t,\lambda_0)\right)} < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda_0 \downarrow 0} q(t,\lambda_0) = \hat{q}$$

où $\hat{q}$ est la solution de $u'(q) = \zeta g + (1-\zeta) f$

Puisque $f < g, \zeta \in (0,1)$ et $\tilde{y}$ est la solution de $u'(y) = g$, alors :

$$\hat{q} > \tilde{y} > 0.$$

Pour tout $\lambda_0 \in (0, g-f)$ définissons $X^d(\lambda_0)$ comme la consommation cumulée de ressource non renouvelable au cours de la première période $\left[0, t_y(\lambda_0)\right)$:

$$X^d(\lambda_0) = \int_0^{t_y(\lambda_0)} (1-\zeta) q(t, \lambda_0)\, dt.$$

On a :

$$\frac{dX^d}{d\lambda_0} = (1-\zeta) q\left(t_y(\lambda_0), \lambda_0\right) \frac{dt_y}{d\lambda_0} + (1-\zeta) \int_0^{t_y(\lambda_0)} \frac{\partial q(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_0} dt$$

$$= (1-\zeta) \left[\tilde{y} \frac{dt_y}{d\lambda_0} + \int_0^{t_y(\lambda_0)} \frac{\partial q(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_0} dt \right] < 0$$

avec

$$\lim_{\lambda_0 \downarrow 0} X^d(\lambda_0) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda_0 \uparrow g-f} X^d(\lambda_0) = 0$$

L’équation :

demande cumulée = stock initialement disponible

$$X^{d}\left(\lambda_0\right) = X^{0}$$

a donc une solution unique :

$$\lambda_0 = \lambda_0^*, \quad 0 < \lambda_0^* < g - f,$$

qui est la valeur optimale de λ_0.

IV – La contrainte de « mix » énergétique ne doit être satisfaite qu'à partir d'une certaine date $T > 0$

Définissons $\zeta(t)$ et $\alpha(t)$ de la façon suivante :

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, T) \\ \zeta & t \in [t, \infty) \end{cases} \quad , \text{ où } \zeta > 0 ,$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} +\infty & , \quad t < T \\ \dfrac{1-\zeta}{\zeta} & , \quad T \leq t \end{cases}$$

La contrainte (3) devient :

$$\alpha(t) y(t) - x(t) \geq 0.$$

Il est facile de démontrer que le sentier optimal est maintenant un sentier à trois phases.

a. Au cours d'une première phase $[0,T)$, la contrainte n'a pas à être prise en compte et seule la ressource non renouvelable est exploitée puisqu'elle est la moins coûteuse, $f < g$. La condition de premier ordre qui détermine l'exploitation de cette ressource a donc pour expression :

$$x(t) > 0 \Rightarrow \gamma_x(t) = 0 \Rightarrow u'(x(t)) = f + \lambda_0 e^{\rho t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{\rho \lambda_0 e^{\rho t}}{u''(x(t))} < 0 \quad t \in [0,T)$$

$$y(t) = 0 \text{ et } f + \lambda_0 e^{\rho t} < g \Rightarrow \gamma_y(t) = g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right) \qquad t \in [0,T)$$

Cette phase est un sentier à la Hotelling standard.

A partir de la date *T* la contrainte s'impose et débute alors un programme analogue au programme étudié à la section précédente dans lequel la contrainte est active ab initio. Les deux phases du programme de la section précédente constituent donc la fin du présent programme, c'est-à-dire ses seconde et troisième phases.

b. Au cours de la seconde phase $\left[T, t_y\left(\lambda_0\right)\right)$ les deux ressources sont simultanément utilisées :

$$x(t) = (1-\zeta)q(t) > 0 \text{ et } y(t) = \zeta q(t) > 0 \Rightarrow \gamma_x(t) = \gamma_y(t) = 0, \quad t \in \left[T, t_y\left(\lambda_0\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}(t) = \frac{\rho(1-\zeta)\lambda_0 e^{\rho t}}{u''(q(t))} < 0 \Leftrightarrow \dot{p}(t) > 0\,, t \in \left[T, t_y\left(\lambda_0\right)\right) \text{ (cf (16) supra)}$$

A la fin de la seconde phase $q(t) = \tilde{y}$ et $p(t) = g$

c. La troisième phase $\left[t_y\left(\lambda_0\right),+\infty\right)$ est la phase d'exploitation exclusive de la ressource renouvelable :

$$x(t)=0\,,\quad y(t)=\tilde{y}\ \text{ et }\ p(t)=g \qquad\qquad ,\quad t\in\left[t_y\left(\lambda_0\right),+\infty\right)$$

Le sentier de prix optimal est illustré à la Figure 3 ci-dessous et le sentier d'utilisation de la ressource non renouvelable à la Figure 4.

On notera que le profil d'utilisation de la ressource renouvelable n'est pas monotone.

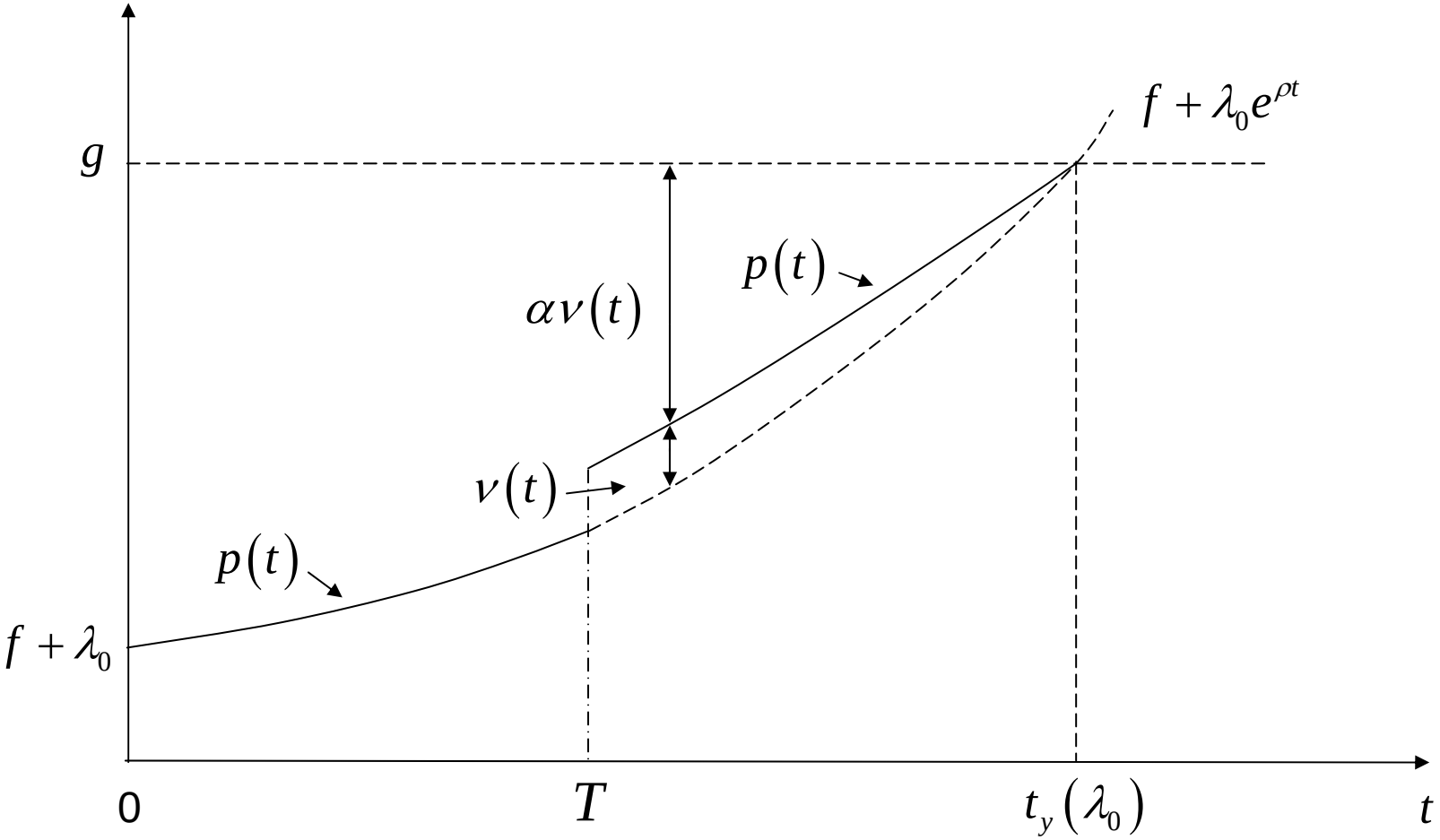


Figure 3 : Surplus brut marginal optimal.
Cas $\zeta(t)=0$ si $t<T$ et $\zeta(\mathrm{t})=\zeta\in(0,1)$ si $t\geq \mathrm{T}$

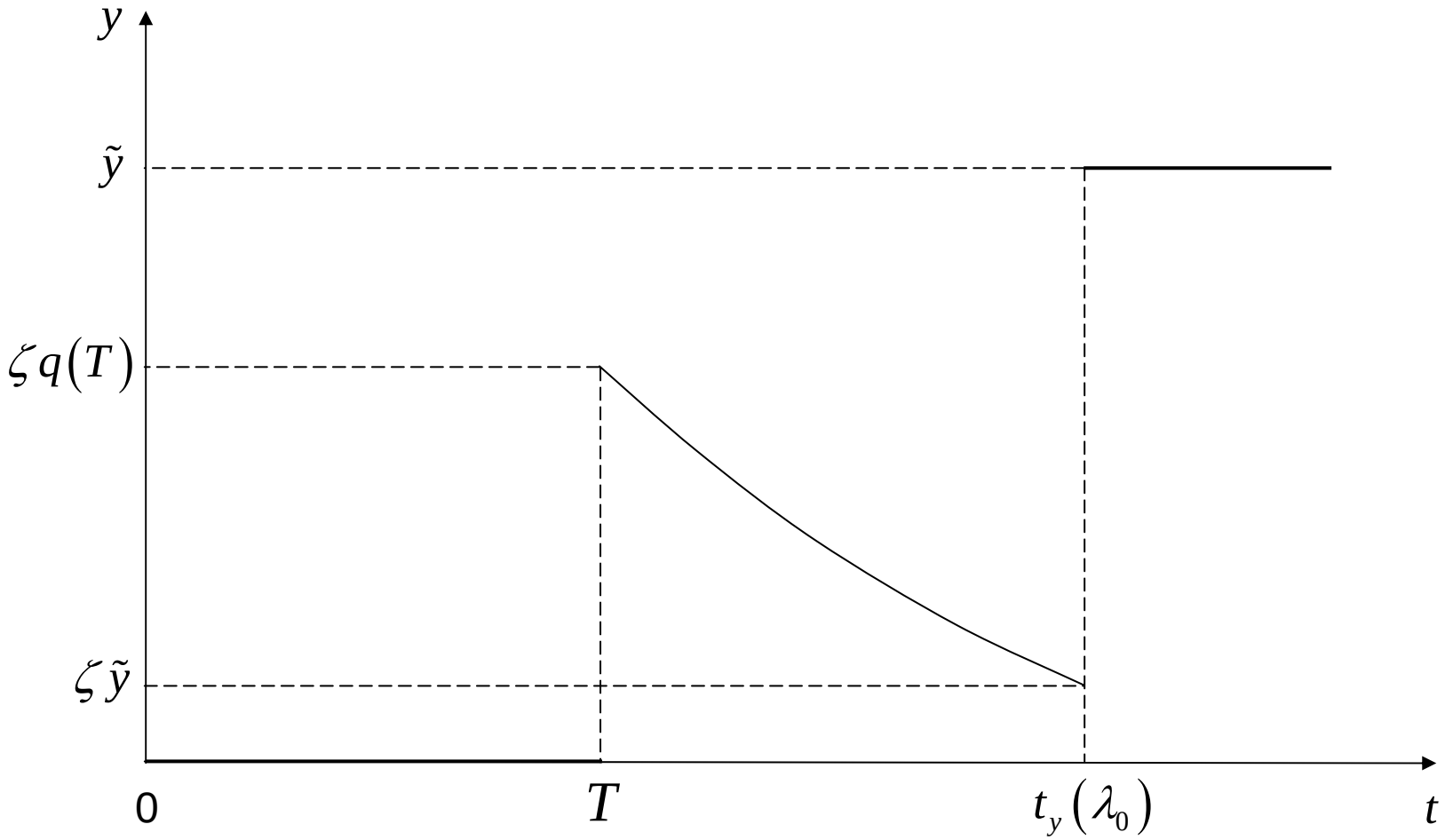


Figure 4 : Sentier de production optimale d'énergie renouvelable.
Cas $\zeta(t) = 0$ si $t < T$ et $\zeta(\mathrm{t}) = \zeta \in (0,1)$ si $t \geq \mathrm{T}$

NB : La figure est tracée en supposant que $\zeta q(T) < \tilde{y}$.
On pourrait avoir aussi l'inégalité inverse.

V – Le cas d'une montée en régime progressive vers le « mix » énergétique visé à terme

Supposons maintenant que la contrainte de ressource renouvelable minimale soit progressivement mise en œuvre sur un intervalle de temps $(T_1, T_2), 0 < T_1 < T_2 < \infty$.

Plus précisément supposons que :

$$\zeta(t) \begin{cases} = 0 & , \quad t \in [0, T_1] \\ \in (0,1) & , \quad t \in (T_1, T_2) \\ = \bar{\zeta} & , \quad t \in [T_2, +\infty) \end{cases}$$

où $\zeta(t)$ est une fonction de classe C^2 strictement croissante, de 0 en T_1 à $\bar{\zeta} > 0$ en T_2.

Supposons que sur l'intervalle (T_1, T_2) les deux ressources sont utilisées et que la contrainte est active. L'équivalent de la condition (14), conséquence des conditions de premier ordre dans le cas où ζ est une constante, i.e. :

$$u'(q(t)) = \zeta g + (1-\zeta) f + (1-\zeta)\lambda_0 e^{\rho t} \qquad (14)$$

prend maintenant la forme :

$$u'(q(t)) = \zeta(t) g + (1-\zeta(t)) f + (1-\zeta(t))\lambda_0 e^{\rho t}, \quad t \in (T_1, T_2) \qquad (17)$$

Différentions par rapport au temps :

$$\dot{p}(t) = \dot{u}'(q(t)) = \dot{\zeta}(t)\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] + \rho\left(1 - \zeta(t)\right)\lambda_0 e^{\rho t} > 0, \qquad (18)$$

De $\dot{u}'(q(t)) = u''(q(t))\dot{q}(t)$, on en déduit que :

$$\dot{q}(t) = \frac{\dot{\zeta}(t)\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] + \rho\left(1 - \zeta(t)\right)\lambda_0 e^{\rho t}}{u''(q(t))} < 0 \quad . \qquad (19)$$

Au cours de la phase de transition :

- le prix de l'énergie doit augmenter
- la consommation d'énergie doit baisser

On ne peut cependant pas dire grand-chose de la consommation d'énergie renouvelable à toute date de l'intervalle (T_1, T_2) car :

- la proportion de l'énergie renouvelable dans la consommation totale d'énergie croit à chaque instant, $\dot{\zeta}(t) > 0$
- mais la consommation totale d'énergie diminue, $\dot{q}(t) < 0$

de sorte que le signe de $\dot{y}(t)$ est indéterminé :

$$y(t)=\zeta(t)q(t)\Rightarrow \dot{y}(t)=\underbrace{\dot{\zeta}(t)q(t)}_{(>0)}+\underbrace{\zeta(t)\dot{q}(t)}_{(<0)} \qquad (20)$$

La seule chose que l'on puisse dire est que le niveau de la production de la ressource renouvelable passe de 0 en T_1 à $\bar{\zeta}q(T_2)>0$ en T_2.

A partir de T_2, $\zeta(t)$ est constant et égal à $\bar{\zeta}$. La partie de sentier qui commence à cette date est donc un sentier du genre de celui étudié à la section III plus haut.

Les sentiers de prix de l'énergie de production de la ressource renouvelable sont illustrés aux Figure 5 et 6 respectivement lorsque $T_2<t_y(\lambda_0)$, c'est-à-dire lorsque la ressource non renouvelable est abondante.

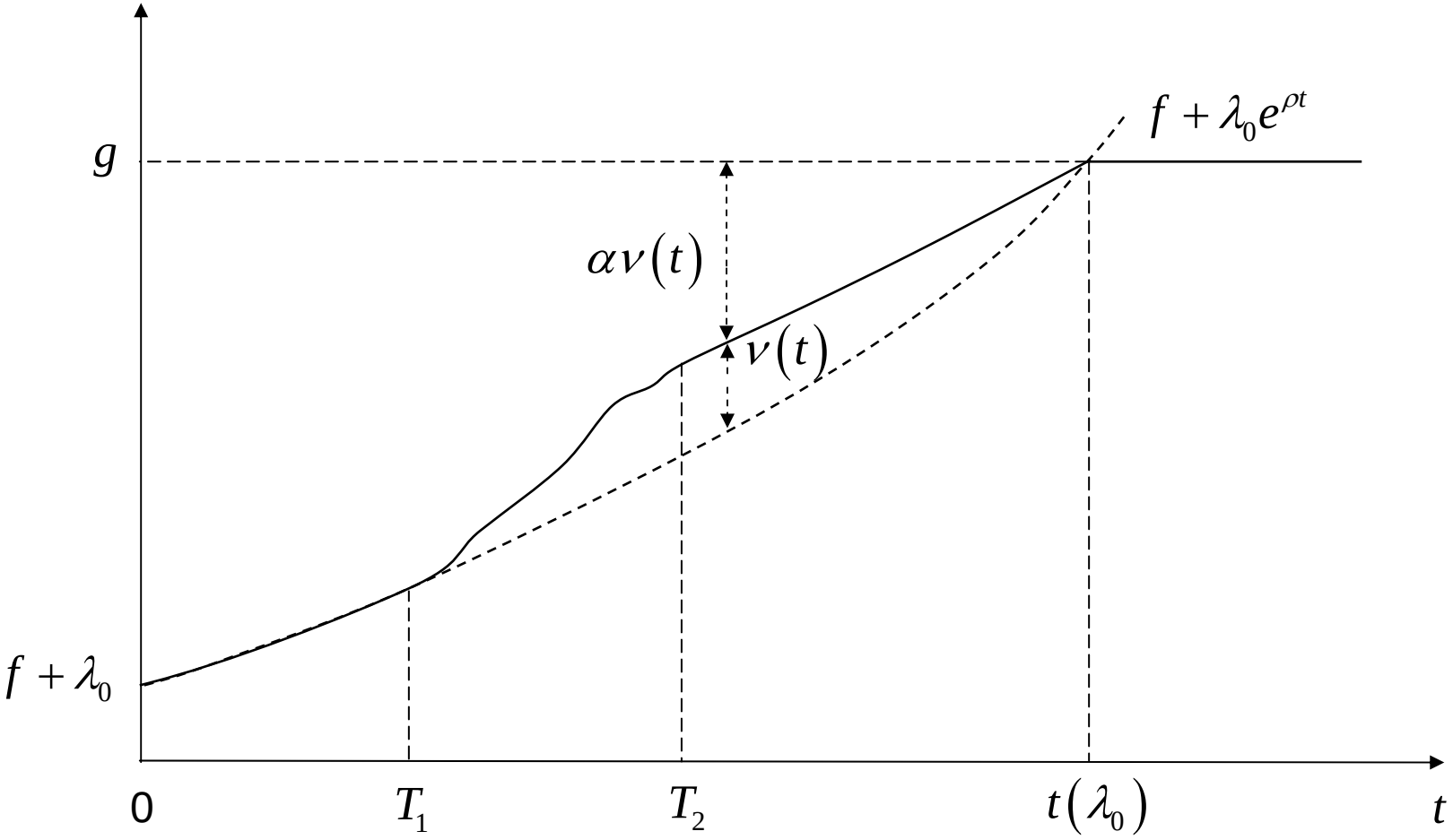


Figure 5 : Surplus marginal brut.
Cas d'une croissance progressive de $\zeta(t)$
sur l'intervalle de temps (T_1, T_2).

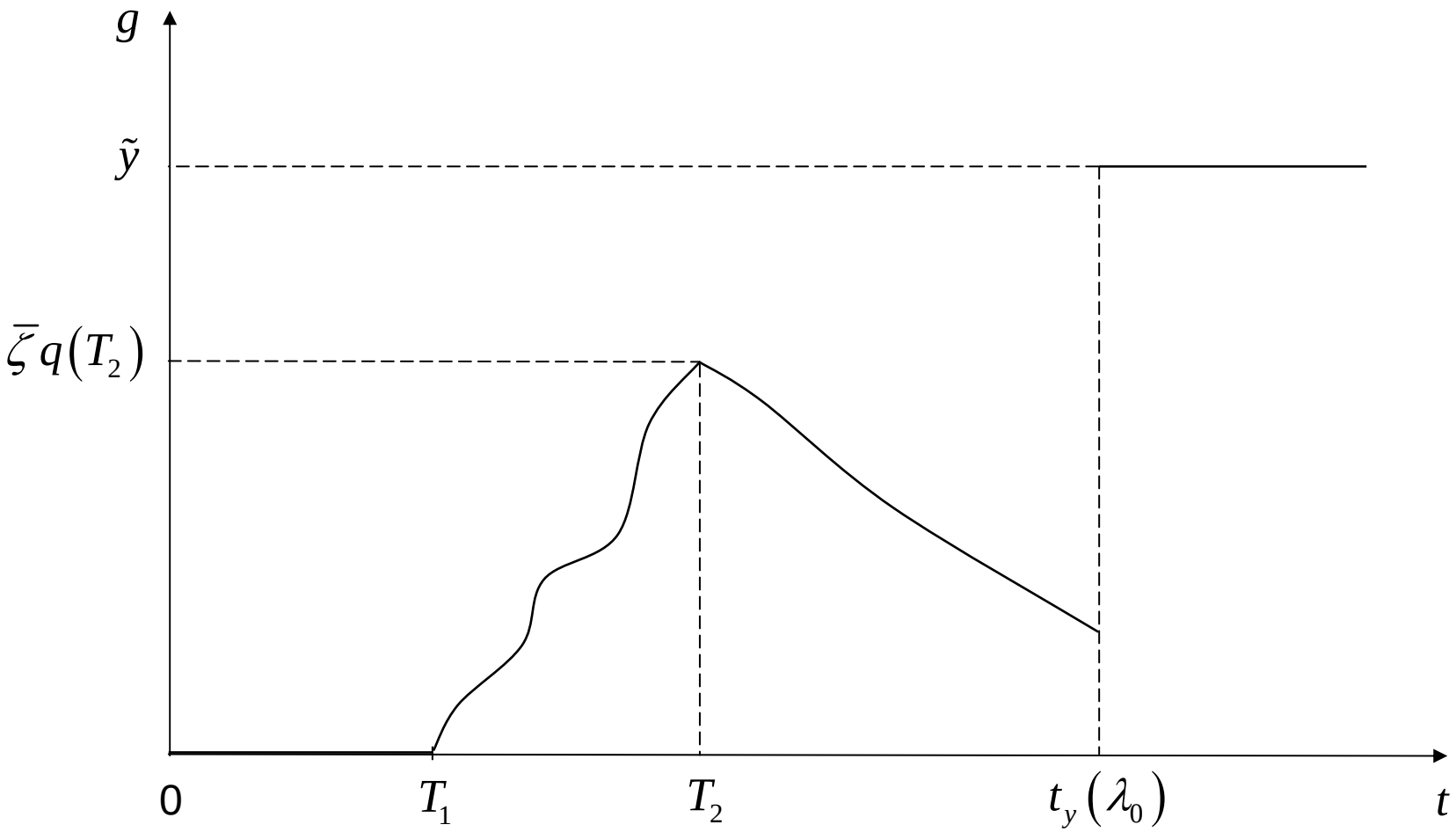


Figure 6 : Sentier de production de l'énergie renouvelable.
Cas d'une croissance progressive de $\zeta(t)$
sur l'intervalle de temps (T_1, T_2).

VI – Les conséquences d'un progrès technique exogène dans la production de l'énergie renouvelable

Supposons que la production de l'énergie renouvelable bénéficie d'un progrès technique exogène qui en abaisse le coût.

Plus précisément supposons que le coût moyen de l'énergie renouvelable soit de la forme suivante :

$$g(t) = \underline{g} + he^{-\beta t}\ , \quad \beta > 0\ , \quad t \geq 0$$

Le coût moyen (marginal) décroît depuis le niveau initial $g(0) = \underline{g} + h$ et tend asymptotique vers $\underline{g}$.

On suppose que $f < \underline{g} + h,$ le coût moyen (marginal) d'exploitation de la ressource non renouvelable est inférieur à celui de la ressource renouvelable, sinon l'énergie non renouvelable ne doit jamais être exploitée.

Une première conséquence de ce progrès technique, de cette baisse du coût marginal de la ressource renouvelable, est que, lorsque seule l'énergie renouvelable est utilisée, le prix de l'énergie diminue et la production d'énergie renouvelable augmente. La condition (21) prend en effet la forme :

$$u'\left(y(t)\right) = \underline{g} + he^{-\beta t}$$

d'où un différentiant par rapport au temps :

$$u''\left(y(t)\right)\dot{y}(t) = -\beta he^{-\beta t} \Rightarrow \dot{y}(t) = -\frac{\beta he^{-\beta t}}{u''\left(y(t)\right)} > 0 \Leftrightarrow \dot{p}(t) = -\beta he^{-\beta t} < 0 \qquad (22)$$

On notera $\tilde{y}(t)$ la solution de cette équation.

Supposons que la contrainte qui pèse sur la structure de l'offre d'énergie s'impose dès la date $t = 0$ et examinons ce qu'il advient lorsque la contrainte est effective.

Au cours d'une phase pendant laquelle les deux ressources sont utilisées et la contrainte est effective, seule la condition de premier ordre relative à la production de l'énergie renouvelable est modifiée. Elle devient :

$$u'\left(x(t)+y(t)\right) = \underline{g} + he^{-\beta t} - \alpha v(t) - \gamma_y(t) \qquad (23)$$

Des conditions de premier ordre (5) relative à la production de l'énergie non renouvelable, et (23) relative à la production de l'énergie renouvelable on déduit que l'équivalent de la relation (11) :

$$\nu(t) = \zeta\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] \tag{11}$$

prend ici la forme suivante :

$$\nu(t) = \zeta\left[\left(\underline{g} + he^{-\beta t}\right) - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right] \tag{22}$$

d'où :

$$\dot{\nu}(t) = -\beta he^{-\beta t} - \rho\lambda_0 e^{\rho t} < 0 \tag{23}$$

La taxe unitaire par unité d'énergie non renouvelable consommée, $\nu(t)$, doit décroître, ainsi que la subvention par unité d'énergie renouvelable utilisée $\alpha\nu(t)$.

Considérons maintenant la condition de premier ordre (5) relative à la production de la ressource non renouvelable :

$$u'\left(q(t)\right) = f + \lambda_0 e^{\rho t} + \nu(t) = f + \lambda_0 e^{\rho t} + \zeta\left[\left(\underline{g} + he^{-\beta t}\right) - \left(\rho + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right]$$

Différentions par rapport au temps :

$$u''\left(q(t)\right)\cdot \dot{q}(t) = \rho\lambda_0 e^{\rho t} - \zeta\beta h e^{-\beta t} - \zeta\rho\lambda_0 e^{\rho t}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{(1-\zeta)\rho\lambda_0 e^{\rho t} - \zeta\beta h e^{-\beta t}}{u''\left(q(t)\right)} \quad . \qquad (24)$$

Le dénominateur de cette expression est négatif.

Mais le numérateur peut être :

- soit toujours positif si $(1-\zeta)\rho\lambda_0 > \zeta\beta h$
- soit d'abord négatif $(1-\zeta)\rho\lambda_0 < \zeta\beta h,$ puis positif pourvu que *t* soit suffisamment élevé

Il en résulte que la phase contrainte d'exploitation des deux ressources peut être :

- soit une phase au cours de laquelle la consommation d'énergie décroît en permanence si $(1-\zeta)\rho\lambda_0 > \zeta\beta h$ et donc le prix de l'énergie, le surplus marginal brut, croît en permanence ;

- soit une phase au cours de laquelle la consommation d'énergie est d'abord croissante si $(1-\zeta)\rho\lambda_0 < \zeta\beta h$ et, si la phase dure suffisamment longtemps, la consommation d'énergie est ensuite décroissante. Lorsque ces conditions sont remplies le prix de l'énergie décroît dans un premier temps et croît ensuite.

La date à laquelle le mouvement s'inverse est la date $t = t_s$ pour laquelle :

$$(1-\zeta)\rho\lambda_0 e^{\rho t} = \zeta\beta h e^{-\beta t} \quad .$$

- soit enfin une phase au cours de laquelle la consommation d'énergie est croissante en permanence, si $(1-\zeta)\rho\lambda_0 < \zeta\beta h$ et si elle est suffisamment courte.

Quel que soit celui de ces trois scénarios possibles qui s'avère être le scénario optimal, la date à laquelle l'énergie renouvelable doit devenir la seule source d'énergie est la date $t = t_y$ à laquelle $\nu(t) = 0$, c'est-à-dire la date à laquelle :

$$\underbrace{f + \lambda_0 e^{\rho t}}_{\substack{\text{coût marginal} \\ \text{complet de l'énergie} \\ \text{non renouvelable}}} = \underbrace{g + h e^{-\beta t}}_{\substack{\text{coût marginal} \\ \text{de l'énergie} \\ \text{renouvelable}}}$$

On peut donc avoir typiquement trois sentiers de prix optimaux illustrés aux Figures 7, 8 et 9 ci-dessous.

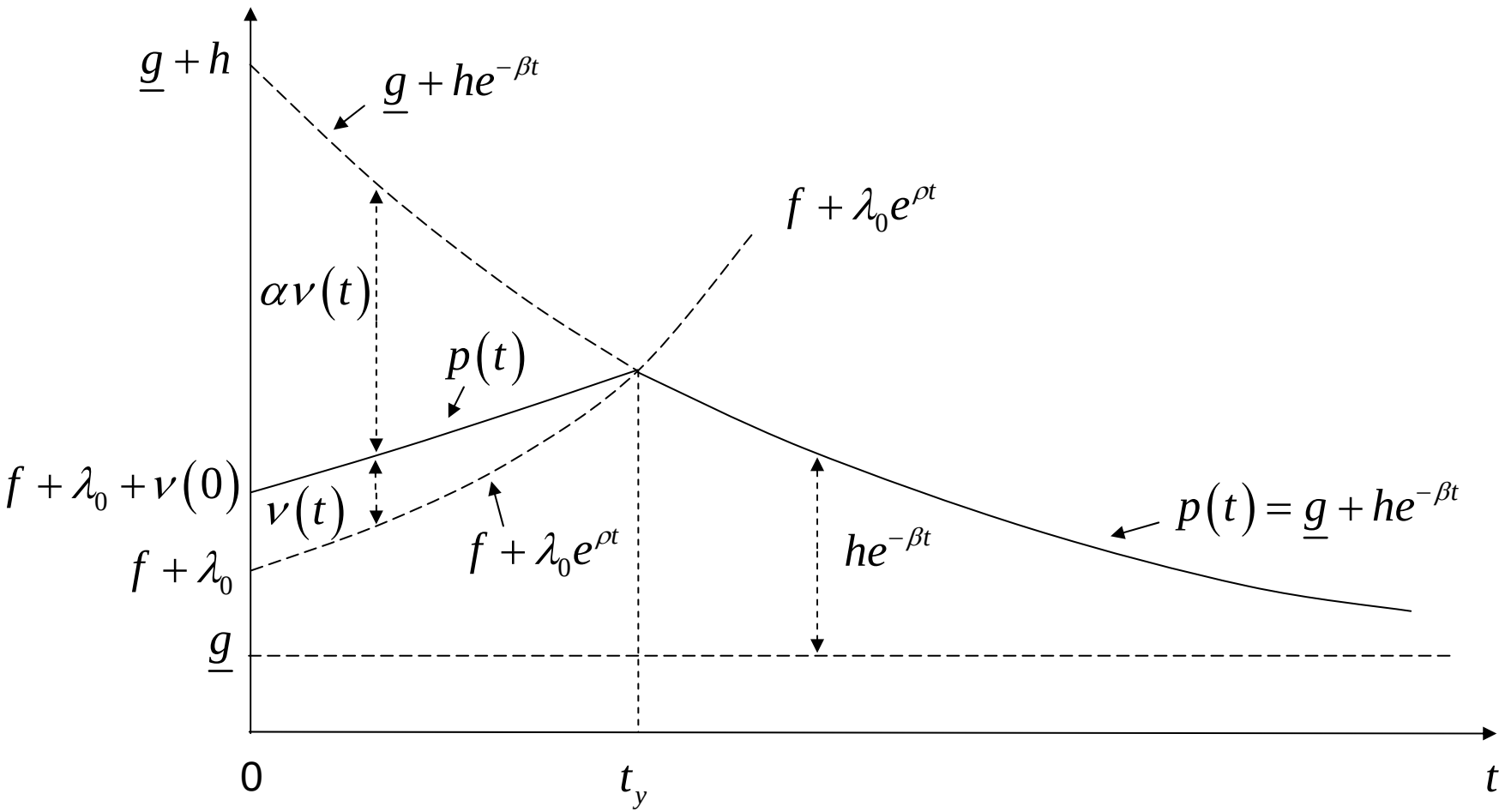


Figure 7 : Surplus marginal brut avec progrès technique exogène dans la production d'énergie renouvelable
Cas $(1-\zeta)\rho\lambda_0 < \zeta\beta h$

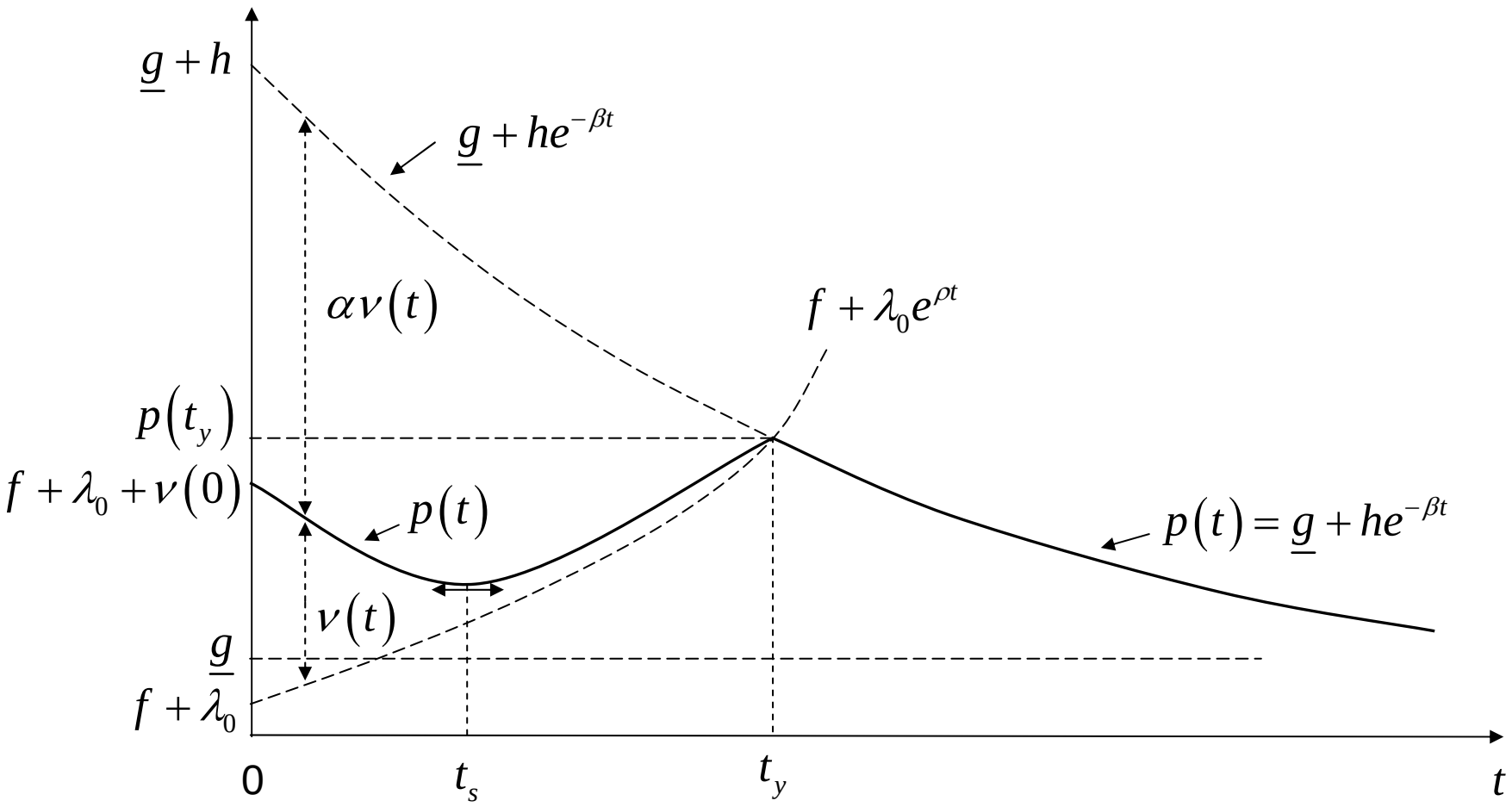


Figure 8 : Surplus marginal brut avec progrès technique exogène dans la production d'énergie renouvelable
Cas $(1-\zeta)\rho\lambda_0 > \zeta\beta h$ et t_y suffisamment élevé

NB : La figure est tracée en supposant que $p(t_y) > f+\lambda_0+\nu(0)$.
Mais l'inégalité pourrait être inversée.

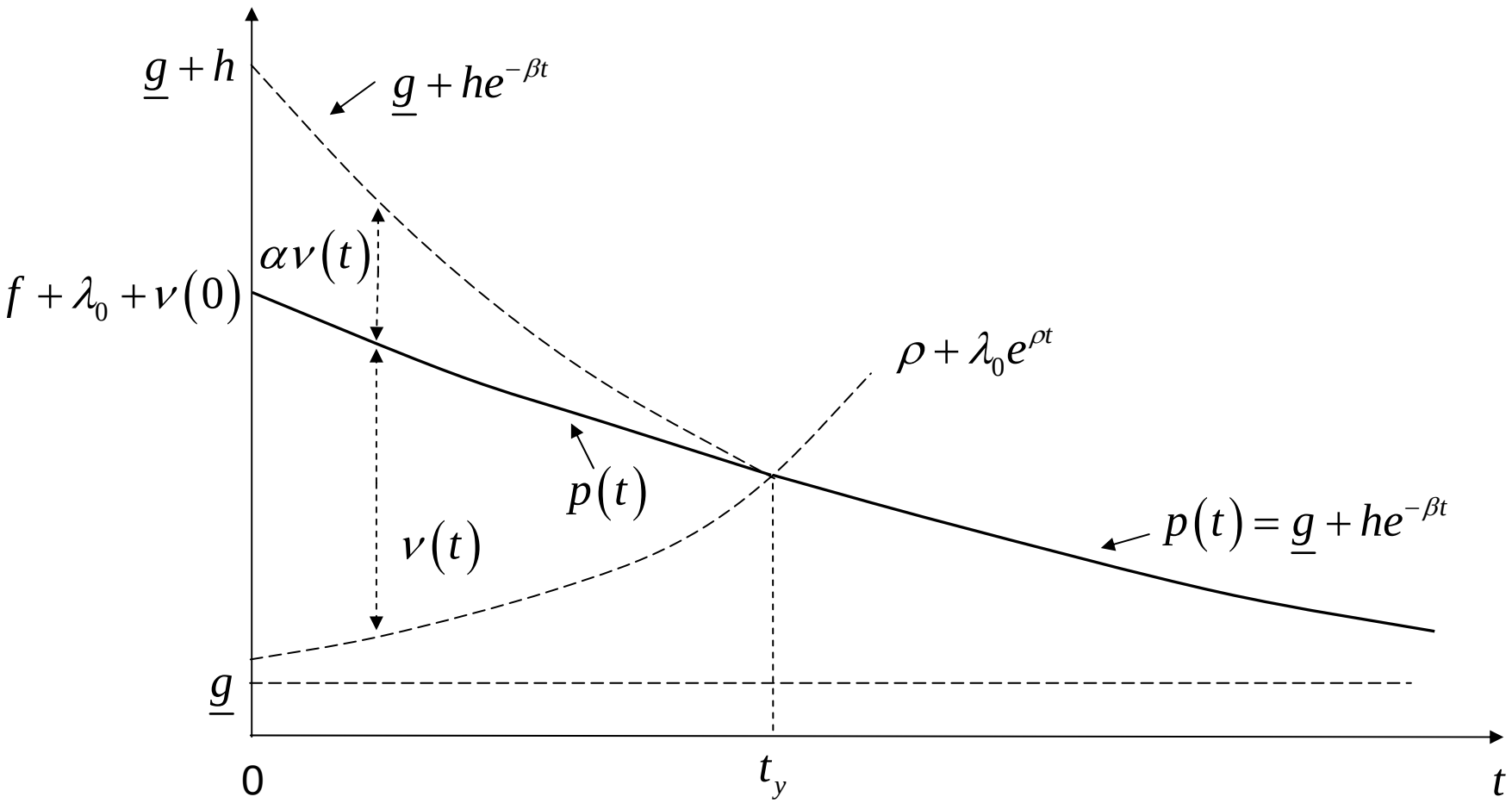


Figure 9 : Surplus marginal brut avec progrès technique exogène dans la production d'énergie renouvelable
Cas $(1-\zeta)\rho\lambda_0 > \zeta\beta h$ et t_y suffisamment petit

Les sentiers de production de l'énergie renouvelable correspondent aux sentiers de prix des Figures 7, 8 et 9 sont illustrés aux Figures 10, 11 et 12 respectivement.

Dans tous les cas à la date t_y à laquelle $\nu(t) = 0$ et $f + \lambda_0 e^{\rho t} = \underline{g} + he^{-\beta t}$, c'est-à-dire la date à partir de laquelle le coût marginal de l'énergie renouvelable $\underline{g} + he^{-\beta t}$ est inférieur au coût marginal complet de l'énergie non renouvelable $f + \lambda_0 e^{\rho t}$, la production d'énergie renouvelable fait un saut vers le haut de $\zeta q(t_y)$ à $q(t_y) = \tilde{y}(t_y)$ comme dans les cas précédents . C'est une conséquence de la constance des coûts marginaux instantanés de production des deux ressources.

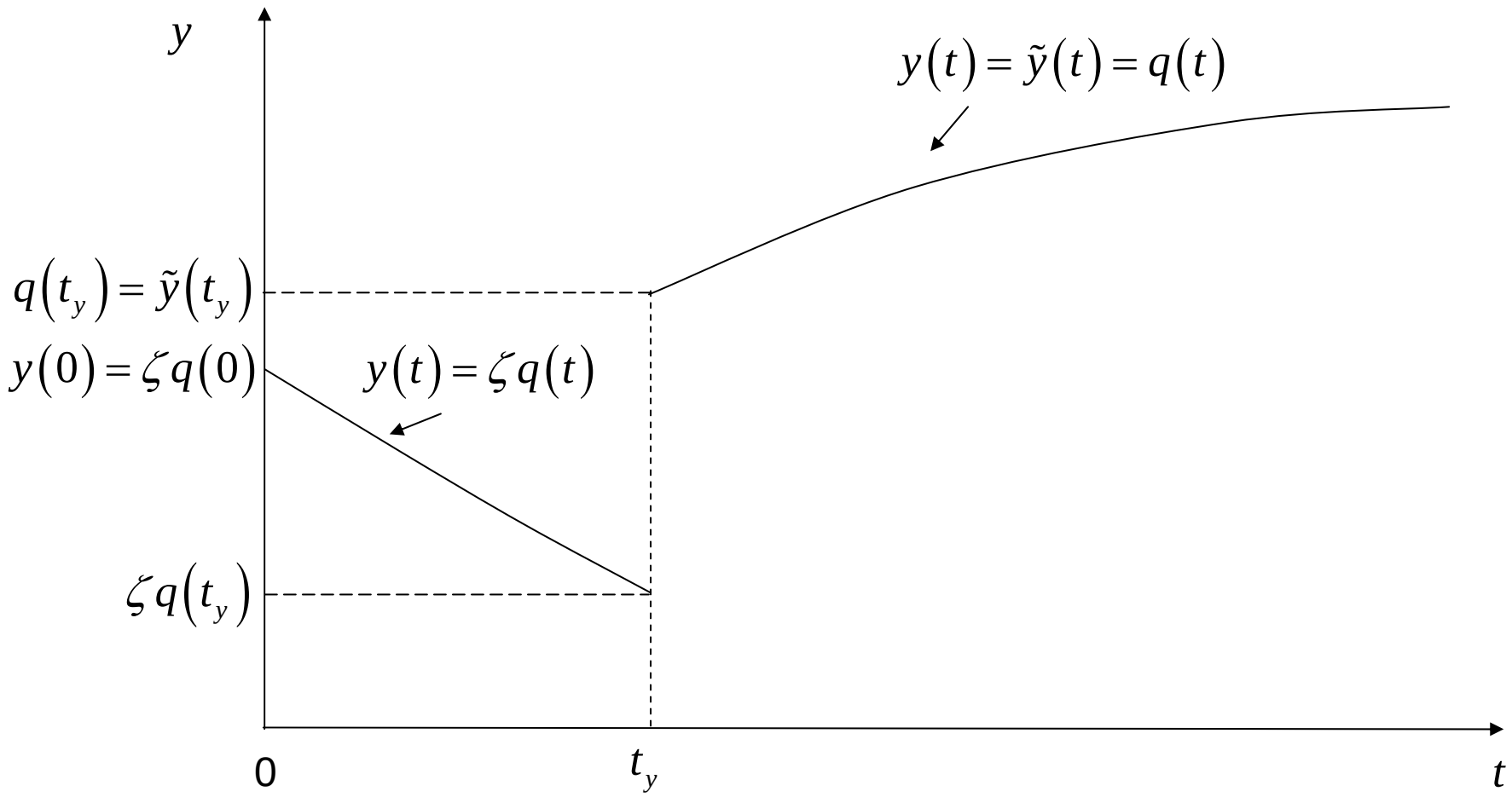


Figure 10 : Sentier de production de l'énergie renouvelable
Cas d'un progrès technique exogène dans la production
de l'énergie renouvelable et $(1-\zeta)\rho\lambda_0 < \zeta\beta h$.

NB : La figure est tracée en supposant que $\zeta q(0) < \tilde{y}(t_y)$,
mais l'inégalité pourrait être inversée.

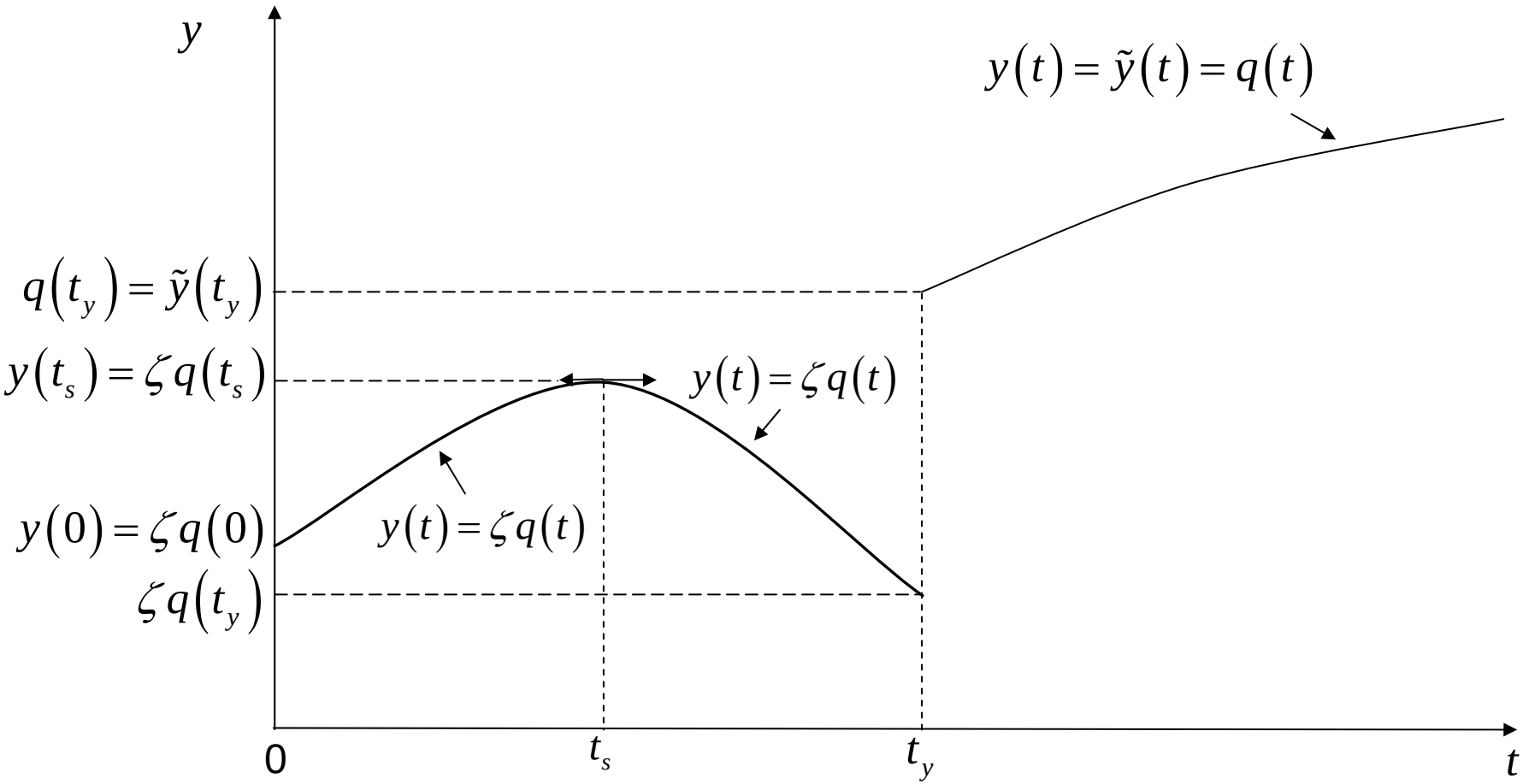


Figure 11 : Sentier de production de l'énergie renouvelable
Cas d'un progrès technique exogène dans la production de l'énergie renouvelable, $(1-\zeta)\rho\lambda_0 > \zeta\beta h$ et t_y suffisamment élevé.

NB : La figure est tracée en supposant que $y_0 > \zeta q(t_y)$ et $\zeta q(t_s) < \tilde{y}(t_y)$, mais les inégalités pourraient être inversées. Les caractéristiques structurelles sont :

$$y(0)=\zeta q(0) < y(t_s)=\zeta q(t_s) \text{ et } y(t_s)=\zeta q(t_s) > \zeta q(t_y).$$

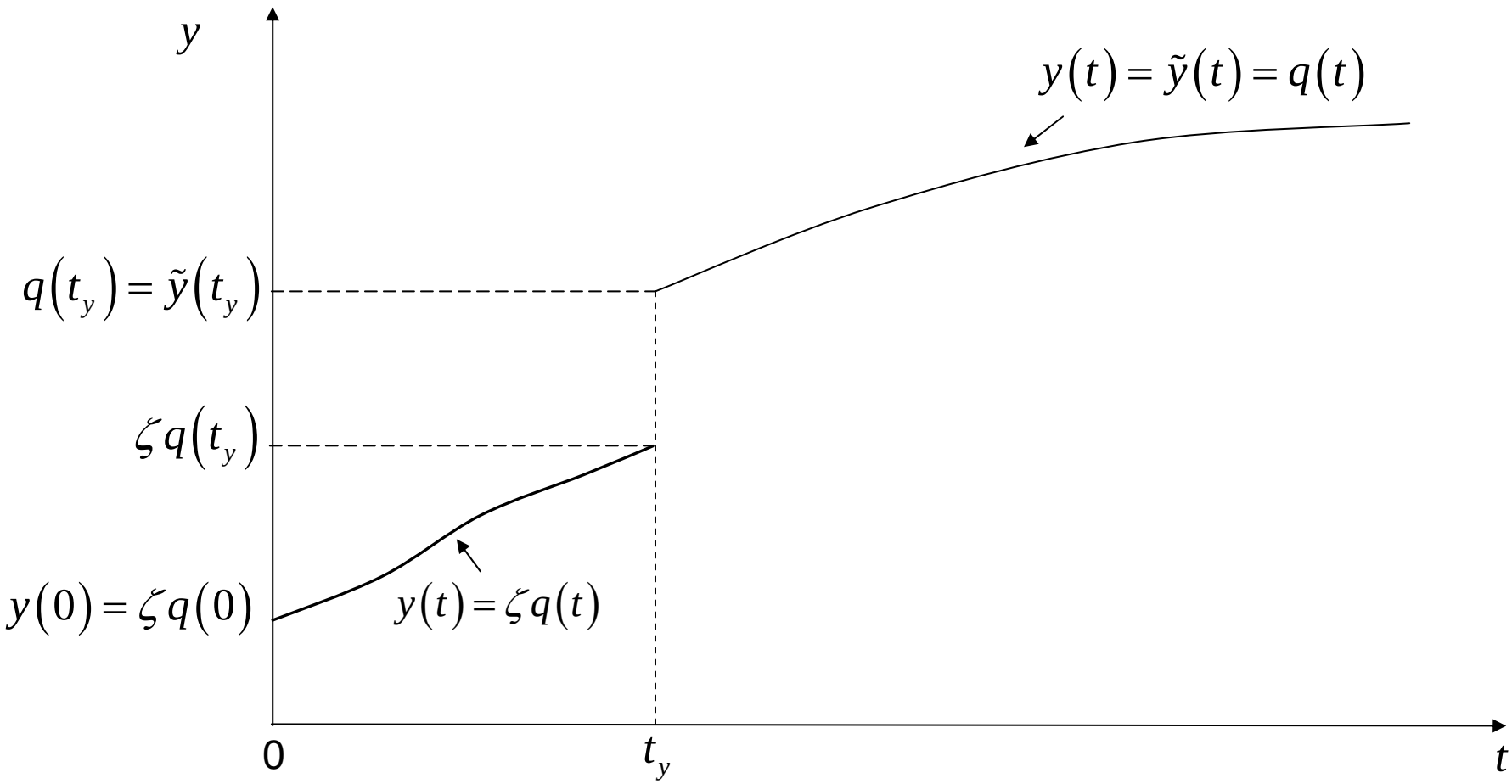


Figure 12 : Sentier de production de l'énergie renouvelable
Cas d'un progrès technique exogène dans la production de l'énergie renouvelable, $(1-\zeta)\rho\lambda_0 > \zeta\beta h$ et t_y suffisamment petit.

VII – Les conséquences d'un effet d'apprentissage dans la production d'énergie renouvelable

Supposons maintenant que la production d'énergie renouvelable bénéficie d'un effet d'apprentissage : le coût moyen de production de cette énergie à toute date est une fonction décroissante de sa production cumulée jusqu'à la date en question.

Notons $Y(t)$ la production cumulée d'énergie renouvelable jusqu'à la date *t* :

$$Y(t) = Y^0 + \int_0^t y(\tau)\,d\tau \qquad \text{où} \qquad \mathrm{Y}^0 \equiv \mathrm{Y}(0) \geq 0$$

d'où :

$$\dot{Y}(t) = y(t)$$

Le coût moyen (marginal) de l'énergie renouvelable est maintenant une fonction décroissante $g(Y)$ telle que :

$$\infty > g(0) \equiv \overline{g} > \underline{g} \equiv \lim_{Y \uparrow \infty} g(Y) > 0 \ , \ g'(Y) = \frac{dg}{dY} < 0 \text{ et } g''(Y) = \frac{d^2 g}{dY^2} > 0$$

Typiquement la fonction g à la forme illustrée à la Figure 13 ci-dessous.

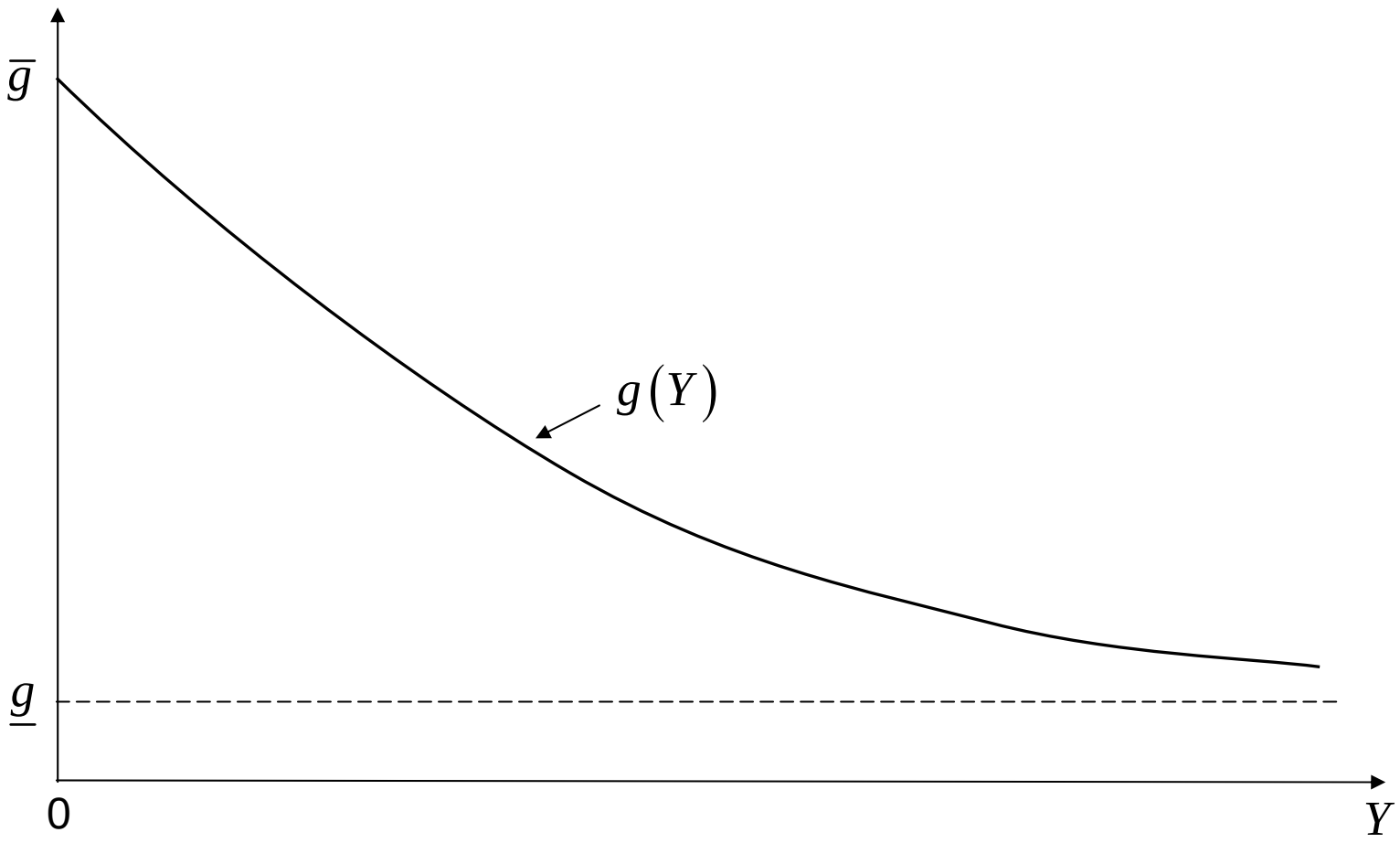


Figure 13 : Coût moyen (marginal) de l'énergie renouvelable en fonction de sa production cumulée

On suppose que Y^0 est tel que $g\left(Y^0\right) > f$. Initialement l'énergie renouvelable est plus coûteuse que l'énergie non renouvelable, sinon cette dernière ne serait jamais exploitée.

Considérons le cas dans lequel la proportion de l'énergie renouvelable dans le bouquet énergétique doive être en permanence au moins égale à $\zeta \in (0,1)$.

Le programme à résoudre est maintenant le programme suivant :

$$\max_{\{(x(t),y(t),t\geq 0)\}} \int_0^{\infty} \left\{ u\left(x(t)+y(t)\right) - f \cdot x(t) - g\left(Y(t)\right) \cdot y(t) \right\} e^{-\rho t} dt \qquad (25)$$

$$\dot{X}(t) = -x(t) \quad , \quad X(0) = X^0 > 0 \text{ donné} \qquad (26)(\equiv (2))$$

$$\dot{Y}(t) = y(t) \quad , \quad Y(0) = Y^0 \geq 0 \text{ donné} \qquad (27)$$

$$\alpha y(t) - x(t) \geq 0 \qquad (28)(\equiv (3))$$

$$x(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad y(t) \geq 0 \qquad (29)(\equiv (4))$$

Le lagrangien du problème en valeur courante a pour expression :

$$L = u\left(x(t)+y(t)\right) - f \cdot x(t) - g\left(Y(t)\right)\cdot y(t) - \lambda(t)x(t) + \mu(t) + \nu(t)\left[\alpha y(t) - x(t)\right]$$
$$+\gamma_x(t)x(t) + \gamma_t(t)y(t)$$

où $\mu(t)$ est la variable adjointe associée à la variable d'état $Y(t), \mu(t) \geq 0.$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'\left(x(t)+y(t)\right) = f + \lambda(t) + \nu(t) - \gamma_x(t) \qquad (30)(\equiv(5))$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'\left(x(t)+y(t)\right) = g\left(Y(t)\right) - \mu(t) - \alpha\nu(t) - \gamma_y(t) \qquad (31)$$

avec les conditions habituelles d'écarts complémentaires.

La dynamique des variables duales doit vérifier :

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial L}{\partial X} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \lambda_0 e^{\rho t} \text{ ou } \lambda_0 = \lambda(0) \qquad (32)(\equiv(10))$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial L}{\partial Y} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu}(t) = \rho\mu(t) + g'(Y(t))\,y(t) \qquad (33)$$

Les conditions de transversalité ont pour expression :

$$\lim_{t\uparrow\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)\,X(t) = \lambda_0 \lim_{t\uparrow\infty} X(t) = 0 \qquad (34)(\equiv(11))$$

$$\lim_{t\uparrow\infty} e^{-\rho t}\mu(t)\,Y(t) = 0 \qquad (35)$$

A nouveau, lorsque la contrainte est effective, i.e. lorsque $\nu(t) > 0$:

- d'après (32) la consommation d'énergie non renouvelable doit être taxée, au taux unitaire $\nu(t)$;

- d'après (33) la consommation d'énergie renouvelable doit être subventionnée, mais maintenant à un double titre :

  - du fait de la contrainte sur le mix énergétique, au taux unitaire $\alpha\nu(t)$

  - du fait de l'effet d'apprentissage, au taux unitaire $\mu(t)$.

Comme dans le cas d'un progrès technique exogène étudié à la Section VI, à partir de la date t_y à laquelle l'énergie renouvelable est la seule source d'énergie exploitée, le prix de l'énergie doit décroître et sa production augmenter sous l'effet de l'accumulation de l'expérience. On a en effet dans ce cas d'après (31) :

$$u'\big(x(t)+y(t)\big)=g\big(Y(t)\big)-\mu(t)-\alpha\nu(t) \quad \Rightarrow \quad u'\big(y(t)\big)=g\big(Y(t)\big)-\mu(t)$$

puisque : $x(t)=0$

$\nu(t)=0$ car la contrainte de mix énergétique n'est plus effective

$\gamma_y(t)=0$ car $y(t)>0$

Différentions cette relation par rapport au temps :

$$u''\big(y(t)\big)\dot{y}(t) = g'\big(Y(t)\big)y(t) - \dot{\mu}(t)$$

Substituons à $\dot{\mu}(t)$ son expression donnée par (33) :

$$u''\big(y(t)\big)\dot{y}(t) = g'\big(Y(t)\big)y(t) - \underbrace{\Big[\rho\mu(t) + g'\big(Y(t)\big)y(t)\Big]}_{\dot{\mu}(t)}$$

d'où :

$$\dot{y}(t) = -\frac{\rho\mu(t)}{u''\big(y(t)\big)} > 0. \qquad (36)$$

Considérons maintenant la phase pendant laquelle la contrainte est effective.

Examinons d'abord comment doit évoluer la variable duale $\nu(t)$.

Des conditions de premier ordre (30) et (31) on déduit la forme que prend ici la condition (11) :

$$(11) \qquad \nu(t) = \zeta\left[g - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right]$$

à savoir :

$$\nu(t) = \zeta\left[\left(g\left(Y(t)\right) - \mu(t)\right) - \left(f + \lambda_0 e^{\rho t}\right)\right]. \qquad (37)$$

Différentions par rapport au temps :

$$\dot{v}(t) = \zeta\left[\left(g'\left(Y(t)\right)y(t) - \dot{\mu}(t)\right) - \rho\lambda_0 e^{\rho t}\right]$$

Substituons à $\dot{\mu}(t)$ son expression donnée par (33) :

$$\dot{v}(t) = \zeta\left[\left(g'\left(Y(t)\right)y(t) - \rho\mu(t) - g'\left(Y(t)\right)y(t)\right) - \rho\lambda_0 e^{\rho t}\right]$$

$$\dot{v}(t) = -\zeta\rho\left[\mu(t) + \lambda(t)\right] = -\zeta\rho\left[\mu(t) + \lambda_0 e^{\rho t}\right] < 0 \qquad (38)$$

Au cours de la phase pendant laquelle la contrainte est effective :

- la taxe unitaire sur la consommation d'énergie non renouvelable doit donc décroître ;
- la subvention unitaire dont doit bénéficier la consommation d'énergie renouvelable à ce titre doit décroître.

Essayons de déterminer maintenant comment évolue la production (consommation) d'énergie $q(t)$.

Partons de la condition de premier ordre (32) relative à l'utilisation de la ressource non renouvelable :

$$u'(q(t)) = f + \lambda(t) + \nu(t) \qquad (32)$$

Différentions par rapport au temps :

$$u''\left(q(t)\right)\dot{q}(t) = \dot{\lambda}(t) + \dot{\nu}(t)$$

Substituons à $\dot{\lambda}(t)$ et $\dot{\nu}(t)$ leurs expressions données respectivement par (32) et (38). On obtient :

$$u''\left(q(t)\right)\dot{q}(t) = \rho\lambda(t) - \zeta\rho\left[\mu(t) + \lambda(t)\right] = \rho\left[(1-\zeta)\lambda(t) - \zeta\mu(t)\right]$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\rho\left[(1-\zeta)\lambda(t) - \zeta\mu(t)\right]}{u''\left(q(t)\right)} \qquad (39)$$

$$(<0)$$

La production d'énergie :

- diminue si la rente minière $\lambda(t)$ pondérée par $1-\zeta$, la part de l'énergie non renouvelable dans le bouquet énergétique, est supérieure à la valeur marginale de l'expérience dans la production de l'énergie renouvelable $\mu(t)$ pondérée par ζ la part de cette énergie dans ce même bouquet ;
- augmente dans le cas contraire.

Il pourrait sembler à première vue qu'on ne puisse pas dire grand-chose de $\dot{q}(t)$.

On notera cependant qu'au cours d'une telle phase :

- d'après (32) : $\dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t)$, la rente minière $\lambda(t)$ croît au taux ρ
- d'après (33) : $\dot{\mu}(t) = \rho\mu(t) + g'(Y(t))y(t)$, la valeur marginale de l'expérience dans la production de la ressource renouvelable croît à un taux inférieur à ρ puisque $g'(Y) < 0$; cette valeur marginale peut même décroître.

On en déduit qu'on peut avoir les mêmes types de sentiers optimaux que dans le cas d'un progrès technique exogène.

Nous avons choisi d'exposer les effets de la décroissance du coût de la ressource renouvelable en supposant alternativement que la fonction *g* est :

- soit de la forme $g = g\left(Y\left(t\right)\right)$
- soit de la forme $g = \underline{g} + he^{-\beta t}$

On peut montrer que, s'agissant des seuls aspects qualitatifs, ces conclusions sont robustes. On peut les déduire de toute fonction *g* de la forme générale :

$$g = g\left(Y, t\right)$$

telle que :

$$g_Y \equiv \frac{\partial g}{\partial y} < 0, \quad g_{YY} \equiv \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} > 0, \quad g_t \equiv \frac{\partial g}{\partial t} < 0, \quad g_{tt} \equiv \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} > 0$$

$$g_{Yt} \equiv \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial t} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{g}\left(\mathrm{Y}^0, 0\right) \equiv \overline{g} > \underline{g} \equiv \lim_{Y \uparrow \infty} \lim_{t \uparrow \infty} g\left(Y, t\right) > 0$$

VIII – Dynamique comparative

Je me limiterai ici à la dynamique comparative « de base », c'est-à-dire à la dynamique comparative par rapport aux paramètres f, g, ρ et ζ pour le cas où la contrainte doit être satisfaite dès la date 0.

Le système à étudier est alors le système à deux variables endogènes, t_y et λ_0, valeurs de t et λ solution du système d'équation :

$$g - \rho - \lambda e^{\rho t} = 0$$

$$X^0 - \int_0^t (1-\zeta) q^D(\tau) d\tau = 0$$

où $q^D(p)$ est la fonction de demande d'énergie c'est-à-dire la solution de :

$$u'(q) = p.$$

Des calculs un peu fastidieux montrent que :

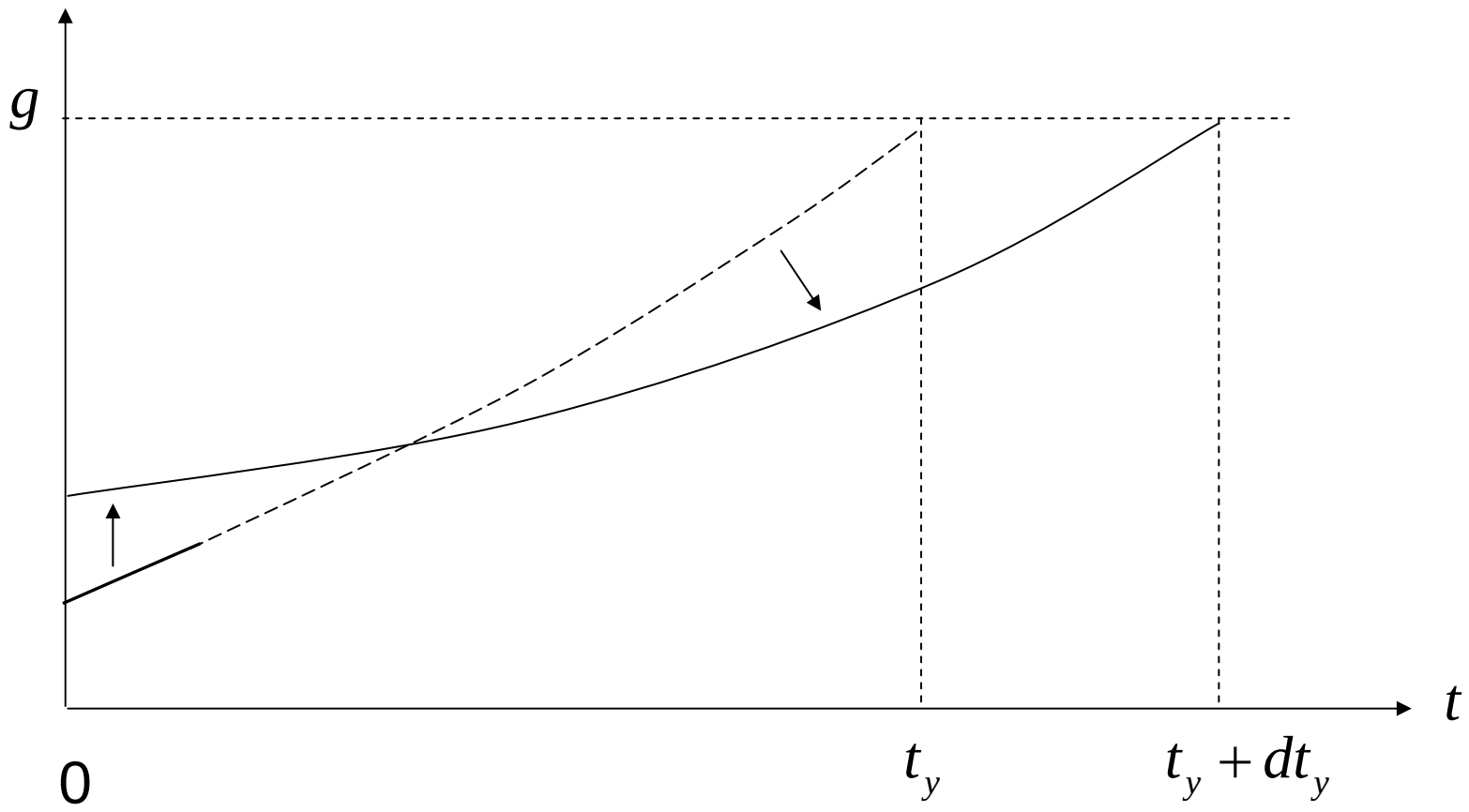
Tableau 1 : Dynamique comparative

	dt_y	$d\lambda_0$	$d\nu(t)$
df	+	-	-
dg	+	?	+
$d\rho$	-	-	+
$d\zeta$	+	-	+

Figure 14 : Effet de $df > 0$ sur le sentier de prix

Effets sur les sentiers de prix

- Accroissement $df > 0$



- Accroissement $df > 0$

La seule caractéristique qu'on puisse établir est que, au voisinage de $t = 0, \quad \dfrac{dp(t)}{dg} > 0.$

Deux cas sont à priori possibles illustrés aux Figures 15 et 16 ci-dessous.

Figure 15 : Effet de $dg > 0$. Premier cas possible

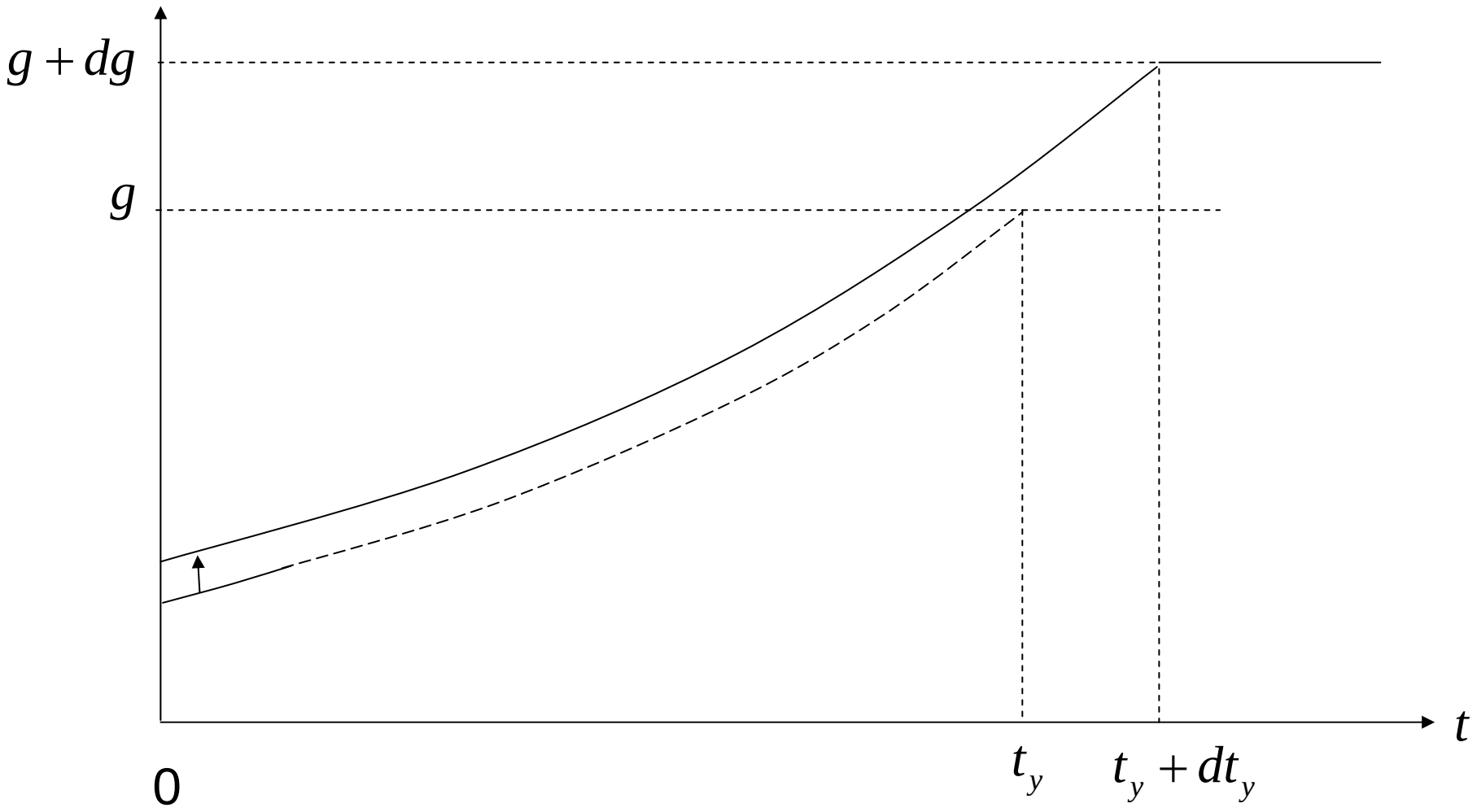


Figure 16 : Effet de $dg > 0$. Deuxième cas possible

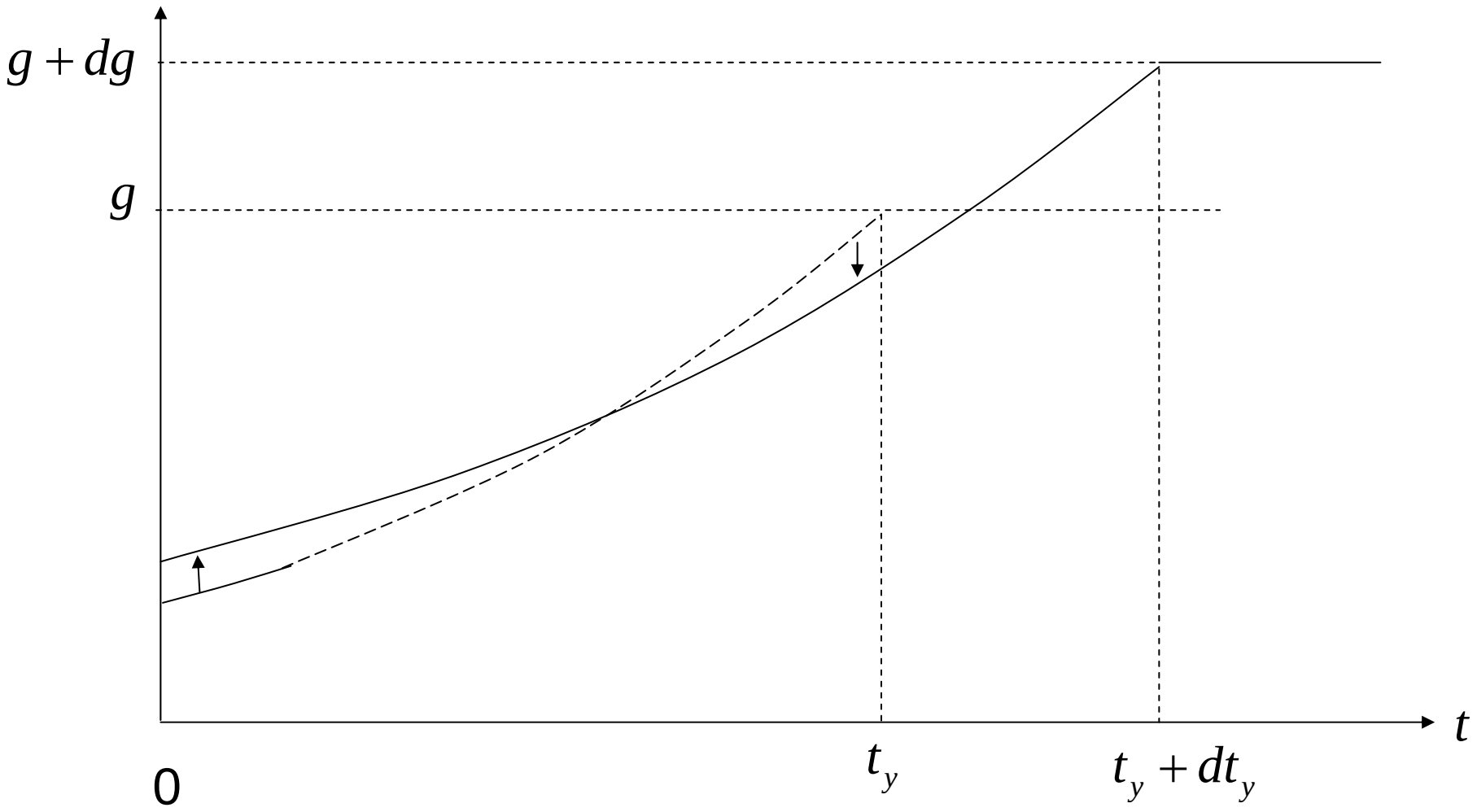


Figure 17 : Effet de $d\rho > 0$

- Accroissement $d\rho > 0$

La modification du sentier est la modification habituelle

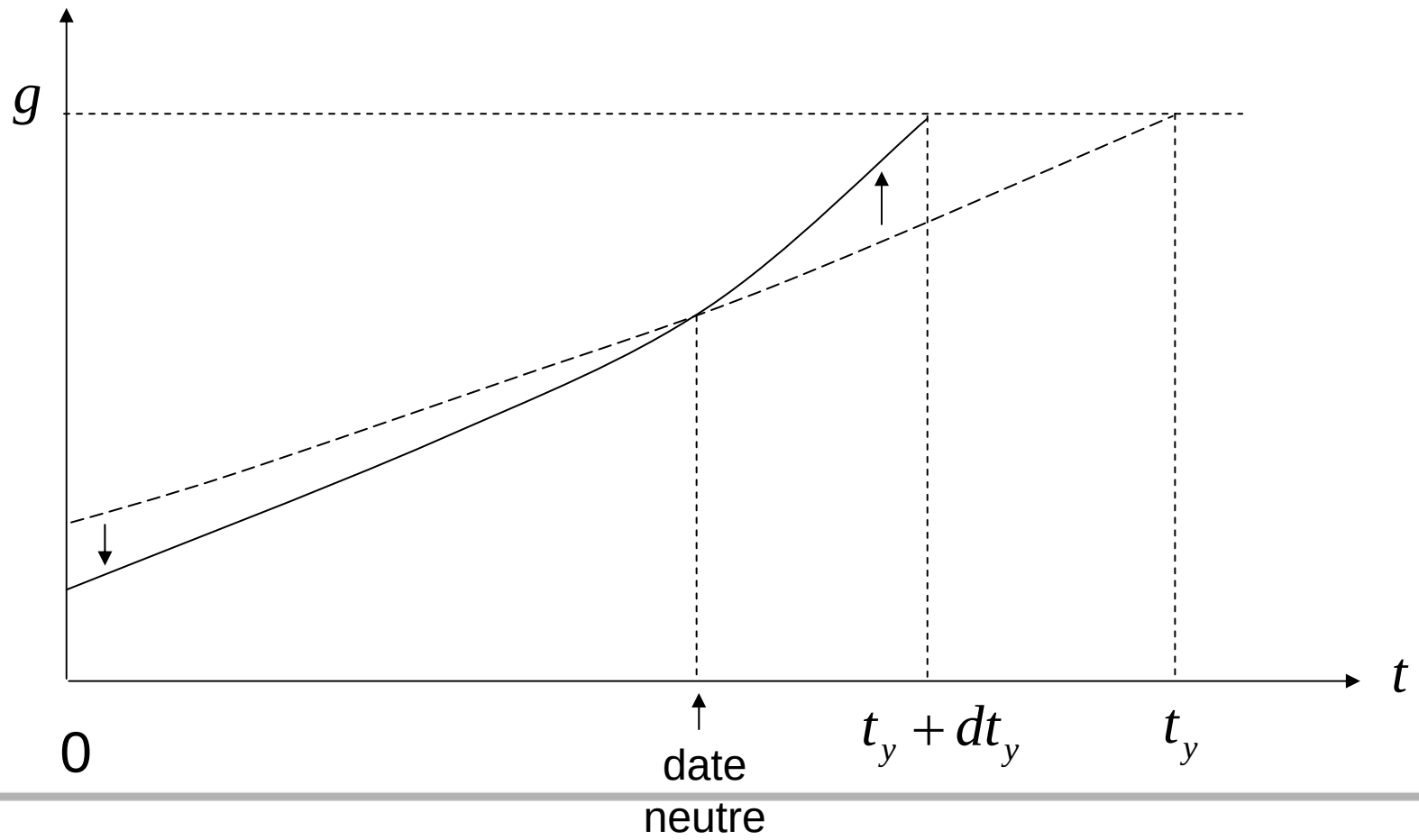
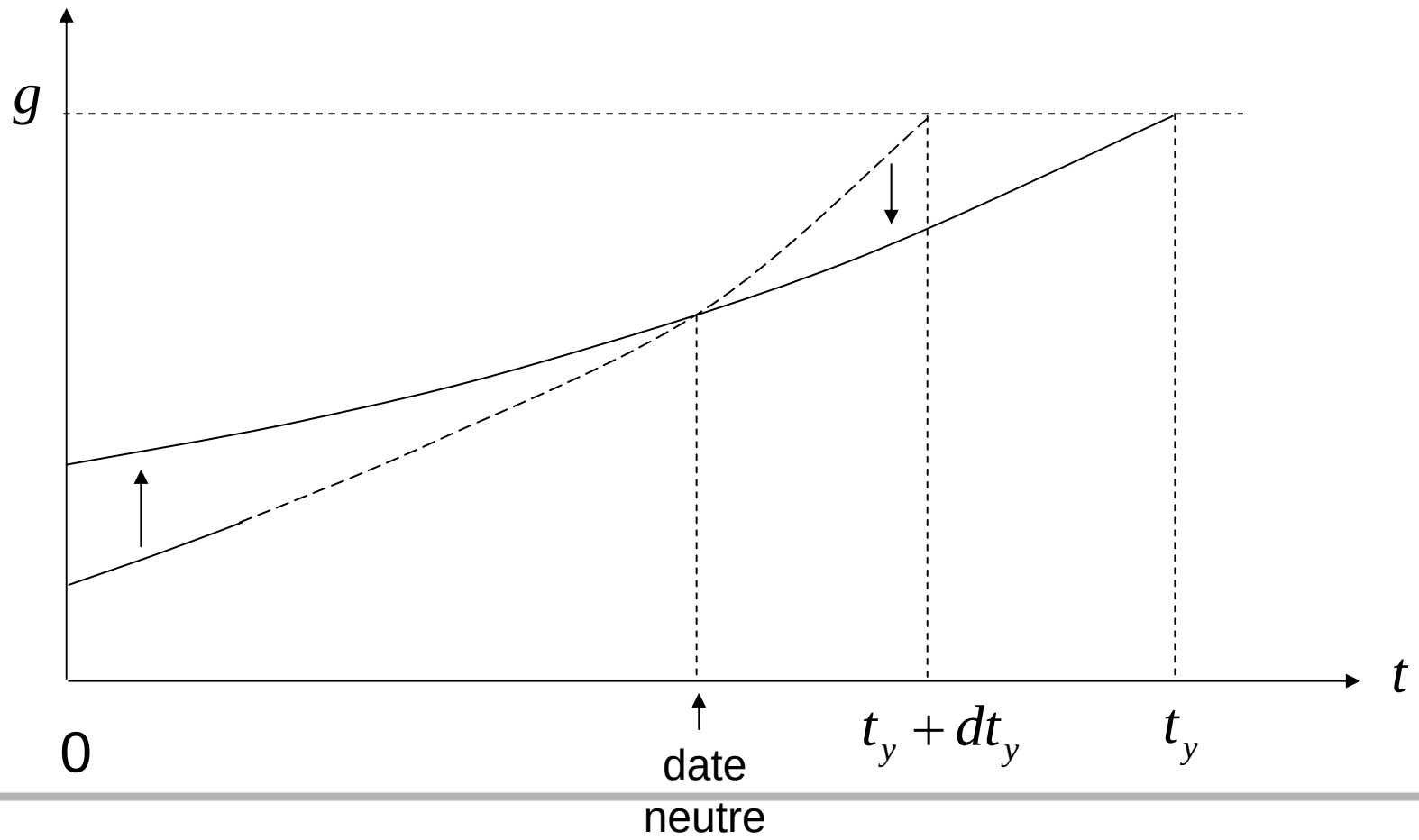


Figure 18 : Effet de $d\zeta > 0$

- Accroissement de la part minimale de la ressource renouvelable $d\zeta > 0$