Maths et Stats appliquées à la Gestion

Brèves du Chapitre I
- Représentation décimale des nombres, finie, infinie, cyclique ou non-cyclique -

Université de Tours - A. Chassagnon

La représentation décimale des nombres : On connaît tous les nombres avec des décimales après les virgules. Ces nombres sont des décimaux, quand les décimales après la virgule sont en nombre fini. Certains nombres, d'usage courant, des fractions, peuvent avoir un nombre infini de décimales, comme par exemple 1/3. Ces fractions ne sont pas des décimaux. D'autres nombres ont aussi, une représentation décimale avec un nombre infini de décimales après la virgule, sans être des fractions. On classe alors 3 ensembles de nombres :

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \text{(décimaux, rationnels et réels)}$$

La représentation décimale permet en pratique de distinguer ces trois classes de nombres. La structure de la partie décimale d'un nombre permet de repérer les rationnels qui sont non décimaux (dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{D}$) et les réels qui sont non rationnels (dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$)

Définition La représentation décimale d'un nombre comprend la représentation de la partie entière du nombre (à gauche de la virgule) et de la partie fractionnaire du nombre (à droite de la virgule). On appelle nombre décimal tout nombre dont le développement décimal est limité, c'est-à-dire dont la partie fractionnaire est finie.

Exemple 1 : Considérez 107,1238, sa partie entière est 127, sa partie fractionnaire, 1238

Exemple 2 : le nombre 1/7 a une partie fractionnaire infinie :
$\frac{1}{7} = 0,14285714285714285714....$

Le cas particulier des fractions Les fractions ont toujours un développement décimal tel que la partie fractionnaire est périodique au bout d'une certaine décimale, c'est à dire qu'à partir d'un certain moment, le développement décimal présente un cycle qui se répète à l'infini

Exemple $\frac{10}{7}$ $\frac{10}{7} = 1,4285714285714285714....$

Exemple $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{7} = 0,4285714285714285714....$

Nombres dont la partie fractionnaire est périodique au bout d'une certaine décimale. On montre que tout nombre dont la partie fractionnaire est périodique au bout d'une certaine décimale est un rationnel. Cette propriété s'applique en particulier aux nombres décimaux, dont le développement décimal est 0 à partir d'un certain nombre (pour lesquels le cycle est à un nombre, égal à 0 qui se répète à l'infini).

Exemple Ecrire $0,3434343434343434$ *sous forme de fraction* *Pour trouver la représentation de ce nombre sous forme de fraction, on remarque que ce nombre s'écrit*

$$\begin{aligned}
0,3434343434343434 &= 34*10^{-2}+34*10^{-4}+34*10^{-6}+\ldots \\
&= 34*10^{-2}\left(1+\left(\tfrac{1}{100}\right)+\left(\tfrac{1}{100}\right)^2+\left(\tfrac{1}{100}\right)^3+\left(\tfrac{1}{100}\right)^4+\ldots\right) \\
&= 34*10^{-2}\frac{1-0}{1-\left(\frac{1}{100}\right)}=34*10^{-2}\frac{100}{99}=\frac{34}{99}
\end{aligned}$$

Les nombres réels Les réels qui ne sont pas des fractions, dits parfois nombres transcendants, ont toujours une représentation décimale infinie, sans aucun cycle. La recherche de la précision de la représentation de ces nombres a occupé mathématiciens et informaticiens. Avec un ordinateurs en 182 bits, on peut donner l'approximation de $\pi = 3,14159265358979 3...$ avec une précision de 34 chiffres représentatifs. .La mémoire s'exerce sur les décimales de π. En octobre 2006, Akira Haraguchi, un ingénieur japonais retraité, récite 100 000 décimales de π en 16 heures et demie

QCM Indiquez, en cochant, les affirmations vraies parmi les 5 énoncés suivants - Refaites le quiz tant que vous n'obtenez pas 100 % des réponses bonnes (*remarque : pour que les boutons fonctionnent, cette partie nécessite que le fichier soit ouvert avec ADOBE READER*)

- ○ $1 = 0,9999999...$
- ○ $0,3434343434... = \dfrac{34}{99}$
- ○ $7,123123123123123... = \dfrac{7116}{999}$
- ○ $0,123123123123123123... = \dfrac{122}{100}$
- ○ $0,123456789123456789... > \dfrac{123456789}{10^9}$

Vérification

Reset