ETFG - Module Assurance

Chapitre I
Comportements individuels quand le risque est objectivement défini

où l'on présente l'idée de risque, les instruments de la mesure du risque, les éléments d'évaluation individuelle du risque.

Université de Tours - A. Chassagnon

Origine du Risque

La question de l'origine du risque doit être précisée, particulièrement quand on commence un cours d'assurance. En effet, il y a des appellations identiques de réalités différentes.

On considère pour une part que le risque est totalement indépendant de l'action humaine, il est en quelque sorte une donnée à laquelle on ne peut rien faire, par exemple, le destin.

- Analyse économique non pertinente dans ce cas

On identifie que l'action et les choix humains peuvent avoir ou modifier des conséquences risquées. Par exemple, le travail d'un cours peut influencer sans être totalement corrélé avec, la note de l'examen. On pourra alors parler de risque mesurable.

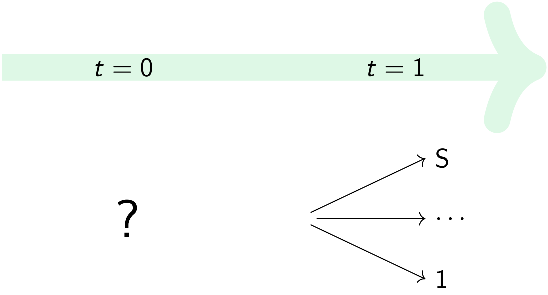
- Analyse économique de l'assurance (mutuelle)

Etats de la nature

Hypothèse

L'analyse du risque suppose connue la liste des états de la nature demain

La description d'un risque commence par la liste des états de la nature que l'on verra réalisés demain. On notera s l'état de la nature demain (inconnu à $t = 0$), $s \in \{1, 2, \ldots, S\}$.



Trois niveaux de connaissance du risque : Risque et incertitude

À la suite de Frank Knight, on peut distinguer trois degrés dans la connaissance imparfaite d'un agent soumis à l'alea :

1. l'incertain
2. le risque
3. l'expertise.

L'incertitude

On dira un agent dans l'incertitude en l'absence de toute connaissance positive d'une distribution de l'alea. Il connaît les différents états de la nature, mais ne peut y associer de probabilité. A ce stade, les opportunités d'échange mutuellement avantageuses sont limitées et la rationalité qui les supporte, rudimentaire.

Le risque

Au second degré, la connaissance d'une distribution permet à l'agent de se représenter le risque auquel il est soumis par des indicateurs comme la moyenne ou la variance d'un choc et d'établir des échelles de comparaison avec d'autres risques associés aux mêmes états de la nature. Ceci est le point de départ de la théorie de l'assurance.

Enfin, il est possible que d'autres agents aient une connaissance plus fine du vrai état de la nature (mais possiblement imparfaite). C'est alors que le cadre économique peut intégrer, par un mécanisme d'échange élaboré, une réduction de cette asymétrie de l'information.

PLAN DU COURS

0) Définition du risque

1) Représentation (objective) du risque

   - Distributions discrètes et continues
   - Statistiques sur les distributions

2) Evaluations du risque

   - Premiers critères de comparaison de loteries, FSD et SSD
   - Deux familles de préférences : Moyenne Variance et EU
   - Equivalent certain et prime pour le risque
   - Aversion et prime pour le risque dans le cas EU

1a.
Représentation objective
du risque

- Distributions discrètes et continues

- Cardan (1501-1576) : « le joueur savant ».

- Probabilité d'un événement = $\sharp$ résultats favorables / $\sharp$ événements possibles.

- « Pile » a une probabilité de $1/2$.
  Probabilité[obtenir un six au moins une fois en 3 lancés] $\geq 1/2$? c'est $= 1 - (5/6)^3 = 0,4213$ (de Méré).

  Remarque : On aurait pu penser que comme en un lancé, la probabilité de voir apparaître 6 est de $1/6$, en trois lancés, elle est trois fois plus grande (parce qu'on additionne la probabilité d'apparaitre au premier tour, puis la probabilité d'apparaitre au second tour et la proba d'apparaître au 3e tour. En fait, c'est méconnaître le fait que si 6 n'est pas apparu au premier tour, la probabilité qu'il apparaisse au second tour doit être déclassée du fait qu'il n'est pas apparu au premier tour. Puis que si le 6 n'est pas apparu au 1er et 2e tour, sa probabilité d'apparaître au troisième tour doit être déflatée du fait de ne pas être apparu au 1er et au 2e tour. En d'autres termes : La probabilité d'avoir 6 au moins une fois en trois lancés est : $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} * \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 * \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Les probabilités aident à décider : un exemple

Un agent économique est placé devant trois portes closes, qu'on numérotera 1, 2 et 3. Il y a une voiture derrière l'une des portes, et une chèvre devant les deux autres portes. La distribution du numéro de la porte derrière laquelle il y a une voiture est uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Voilà histoire de cet agent : On lui demande *Ex ante* de désigner l'une des trois portes, on note $s \in \{1, 2, 3\}$ ce signal [la porte reste fermée]. Ensuite, un expérimentateur, observant s et qui connaissant la porte de la voiture, ouvre une porte au hasard, hormis la porte de la voiture, et la porte s. On appelle *Interim* ce moment d'apprentissage. La question, dans cet exercice est d'analyser le choix subséquent de l'agent. On dira qu'il a gagné, si la voiture, *ex post* est derrière la porte qu'il choisit alors.

<u>L'agent a-t'il intérêt à ouvrir la porte s qu'il avait désignée initialement ?</u>

Les probabilités aident à décider : suite de l'exemple

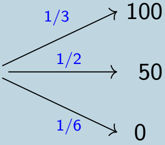
Pour les commodités de la résolution de ce problème, on considère $s = 1$. On notera (i, j) un état de la nature où i est la bonne porte, et j la porte ouverte par l'expérimentateur. On rappelle la formules de Bayes $p(A|B) = p(B|A)p(A)/p(B)$. Enfin, on indique qu'il n'y a que quatre états de la nature de mesure positive dans ce problème, les états (1,2), (1,3), (2,3), (3,2) de probabilités respective $1/6$, $1/6$, $1/3$ et $1/3$.
]

Définition à connaître d'une Distribution du risque

Distributions discrètes

Il y a un nombre fini d'évènements possibles $s \in \mathcal{S}$, chacun avec probabilité p_s. Cette association à chaque évènement de sa probabilité, c'est ce qu'on appelle la **distribution** des risque. Cette distribution satisfait toujours la contrainte

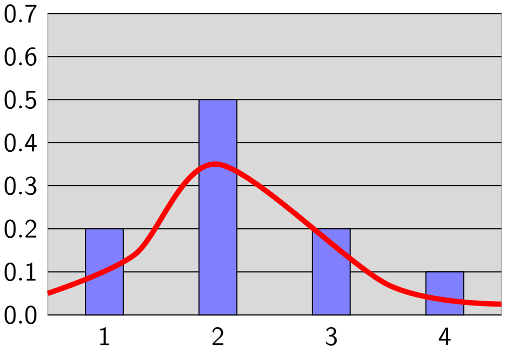
$$\sum_{s \in \mathcal{S}} p_s = 1$$



Distributions continues

Il y a un nombre infini, voire continu d'évènements possibles : chacun, pris isolément apparaît avec une probabilité nulle. La fonction de **distribution** (via la surface sous cette fonction) décrit la probabilité de n'importe quel ensemble. La fonction de **repartition** décrit le poids relatif des évènements de faible gain par rapport aux évènements de gains plus élevés.

Représentation de Distributions de probabilités



- en bleu un diagramme en tuyau d'orgue représentant une distribution discrète
- en rouge, une distribution d'une variable continue sous-jacente.

Fonctions de répartition

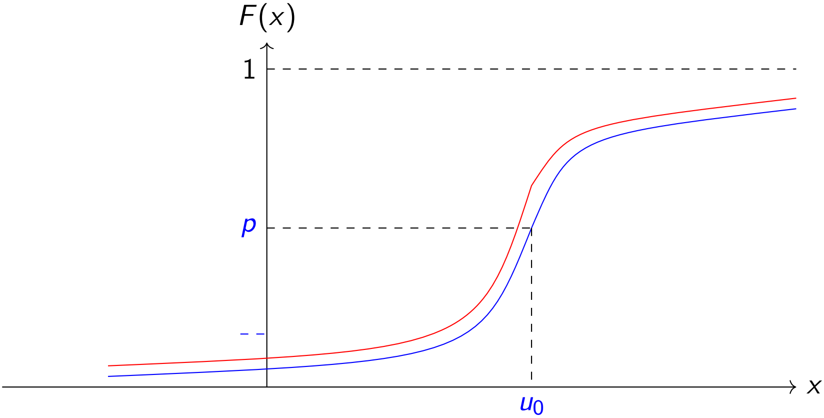


Figure – deux fonctions de répartitions : F et G

1b.
Représentation objective
du risque

- Statistiques sur les distributions

Statistiques

Moyenne $\sum_i$ probabilités * richesses
dans l'exemple précédent, moyenne=50

Variance une mesure de la distance à la moyenne.
exemple : la distribution $\mathcal{A}$ a une plus grande variar
que la distribution $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 75 \\ {} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\ & 25 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 100 \\ {} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\ & 0 \end{tikzcd}$$

$$VAR(\mathcal{B}) \leq VAR(\mathcal{A})$$

Modes représente le/les évènements avec la plus grande pr
babilié

Fractiles Divise la population en classes égales, représentées p
une richesse pivot.

Statistiques - Pour aller plus loin

Il y a en fait deux familles de statistiques :

les *statistiques de position* dont l'objectif est de donner un ordre de grandeur des valeurs observées

les *statistiques de dispersion* qui évaluent le niveau d'étalement de la série autour de la valeur centrale.

Statistique de position

Les paramètres de position (ou valeurs centrales) sont des valeurs numériques qui « résument » une série statistique en caractérisant l'ordre de grandeur des observations. Ils s'expriment dans la même unité que les observations. Les paramètres de position permettent de situer la position de plusieurs séries comparables. Lorsque la distribution est parfaitement symétrique, mode, moyenne et médiane sont confondues.

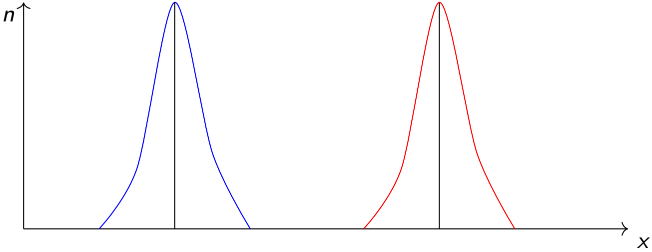


FIGURE – Les deux courbes ont la même allure, mais ne se positionnent pas du tout au même endroit sur l'axe des valeurs (des modalités). Les paramètres de position le mettent clairement en évidence.

Moyenne arithmétique d'un ensemble de N nombres

Définition

La moyenne arithmétique de N nombres est égale à la somme de ces nombres divisée par leur nombre.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

- **Exemple simple** 3 individus, gagnent respectivement 10.000 euros, 20.000 euros et 30.000 euros. La moyenne de leur revenu est 20.000 euros.
- **Remarque** La moyenne arithmétique est exactement la quantité qui pourrait être identiquement distribuée à chaque individu. En effet, la conséquence directe de la définition de $\bar{x}$ est : $N\ \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$.

Moyenne arithmétique d'une distribution

Dans le cas d'une distribution, il faut prendre en compte la fréquence d'apparition de chacune des réalisations.

- **Cas discret : à partir du tableau de fréquences** Une variable X prend les valeurs x_i avec la fréquence f_i pour $i = 1, \ldots, N$. La moyenne de cette variable est

$$\bar{X} = \sum_i f_i \; x_i$$

la comparaison avec la formule du transparent précédent est immédiate. $\frac{1}{N}$ est remplacé par la fréquence (individualisée) de chaque réalisation f_i.

- **Cas continu : à partir de la fonction de distribution** Un variable X est définie par sa fonction de distribution $f(x)$, sa moyenne est

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f(x) dx$$

Distribution représentée comme un bruit blanc autour d'une moyenne

Quand il n'y a pas trop de dispersion autour de la moyenne, il est assez naturel de représenter une distribution comme étant une valeur certaine autour de laquelle il y a un bruit blanc.

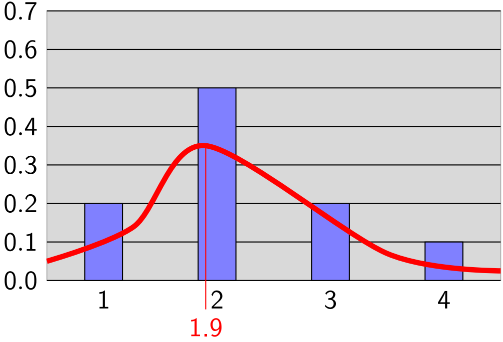
Définition Un bruit *blanc* est une variable aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ dont la moyenne est nulle ($E(\tilde{\varepsilon}) = 0$) dont les réalisations sont faibles en regard de la valeur (de position) x.

Exemple Soit la variable aléatoire $\mathcal{A}$ suivante, on peut la représenter comme la somme de sa moyenne et du bruit blanc $\tilde{\varepsilon} = \mathcal{A} - E[\mathcal{A}]$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 50,3 & & & & & 0,1 \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & & = & 50,2 & + & \tilde{\varepsilon} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\
 & 50,1 & & & & & -0,1
\end{tikzcd}
$$

Tout se passe comme si un agent qui était exposé au risque représenté par $\mathcal{A}$ recevait la valeur sûre 50,2, dans un premier temps, cad la moyenne, et qu'avec égale probabilité, il perde (ou il gagne) à partir de cette valeur sûre -0,1 (ou +0,1).

Le mode d'une variable qualitative ou quantitative discrète : modalité dont la fréquence (absolue ou relative) est la plus élevée. Dans le cas où une variable continue a été regroupée en classes, le mode est la classe dont la fréquence est la plus élevée.

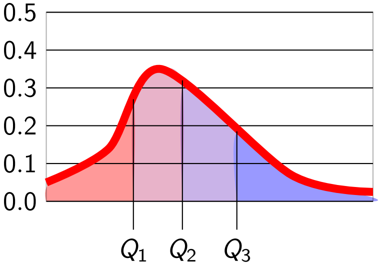


Dans l'exemple ci-dessus, le mode de la variable discrète est 2, celui de la variable continue, 1.9.

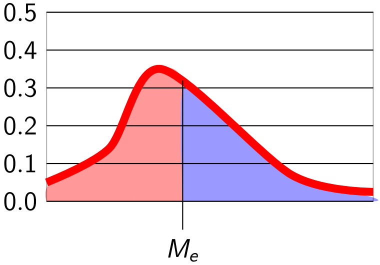
Les quantiles : séparer une distribution en parts égales

Lorsque la variable est ordonnée, si elle est continue, et parfois même quand elle est discrète ordonnée, on cherche à représenter les différentes parties d'une distribution. On nomme *quantiles* les valeurs qui permettent de séparer la distribution en parts égales. L'opération varie avec le nombre de parts.

Dans le cas d'une séparation en quatre, les *quartiles* sont les valeurs qui partagent la distibution en 4 parties de 25%.



Dans le cas d'une séparation en deux, la *médiane* est la valeur qui partagent la distibution en 2.



Le quantile, défini pour les variable ordonnées

Definition

les quantiles sont les valeurs de la variable partageant la série classée par ordre croissant de la variable en k sous-ensembles égaux.

$k = 2$	c'est la *médiane*	M_e
$k = 4$	c'est les *quartiles*	Q_1, Q_2, Q_3
$k = 10$	c'est les *deciles*	$D_1, D_2, \ldots, D_9$
$k = 100$	c'est les *centiles*	$C_1, C_2, \ldots, C_{99}$

▶**Calcul du $n^{\text{ième}}$ quantile ($n < k$)**

- Classer les données en ordre croissant, et calculer les fréquences cumulées $F(x)$
- Si $\exists x_i \; / \; F(x_i) = n/k$: le $n^{\text{ième}}$ quantile est x_i.
- Si $\exists x_{i-1}, x_i \; / \; F(x_{i-1}) < n/k < F(x_i)$: le $n^{\text{ième}}$ quantile est x_i. On peut parfois considérer l'intervalle $]x_{i-1}, x_i]$ ou en faire la moyenne de x_{i-1}, x_i (dans le cas de la médiane, on parle d'intervalle médian).

Exemple

-

Modalité	Effectifs	Fréquences	Fréq. cumulées	Qi
2	1	0.1	0.1	
3	3	0.3	0.4	0.25
4	4	0.4	0.8	0.5 ; 0.75
6	2	0.2	1	
Total	10	1		

Dans la pratique, il faut trouver les modalités dont la fréquence cumulée est “juste au-dessus” de 0.25, 0.5, 0.75

- Prouver dans l'exemple suivant que le nombre d'enfants median est 2

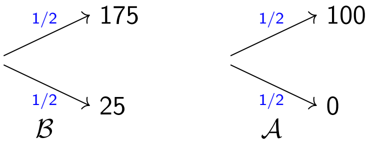
nb enfants	0	1	2	3	+ de 3
Effectifs	2	1	4	2	1

2a.
Évaluations subjectives
du risque

- Premiers critères de comparaison de loteries, FSD et SSD

Comparaisons - FSD

Certaines comparaisons admises par tous sont *robustes*. Ainsi, on préfèrera la loterie $\mathcal{B}$ à la loterie $\mathcal{A}$ si l'utilité des agents est croissante avec la richesse dans chaque état de la nature.



Définition : On dira qu'une distribution domine une autre distribution suivant le critère de *dominance stochastique de premier ordre* si cette distribution rémunère plus tous les états de la nature.

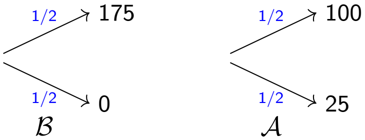
- *Cependant*, ce critère est loin de permettre de classer toutes les loteries. Ainsi, il sera implossible d'établir suivant ce critère un ordre de préférence entre la loterie $\mathcal{B}$ et le revenu certain de 50.

Critère de comparaison entre deux loteries : le spread

On dit que la loterie B est un spread de la lotterie A si la différence entre les fonctions de répartition est positive (ou nulle) puis négative (ou nulle) : $\exists x_0 \ s.t. \ \big(F_B(x) - F_A(x)\big)(x - x_0) \leq 0$.

Cette relation traduit l'idée que la loterie B est plus risquée que la loterie A en ce sens qu'elle donne plus d'importance à l'occurence des évènements quand ces évènements sont petits, et moins d'importance à l'occurence des évènements quand ces évènements sont grands.

Par exemple pour les deux loteries suivantes, B est un spread de A.



Si on regarde les différences de fonction de répartition, on a :

	$x \leq 0$	$0 < x \leq 25$	$25 \leq x < 100$	$100 \leq x < 175$	$x \geq 175$
$F_B(x) - F_A(x)$	0	0,5	0	-0,5	0

dans cet exemple on peut prendre n'importe quel $x_0 \in [25, 100]$

Spread, compréhension plus fine

Il s'agit de déplacer du poids du centre de la distribution vers les queues, comme par exemple dans les distribution suivantes f et g :

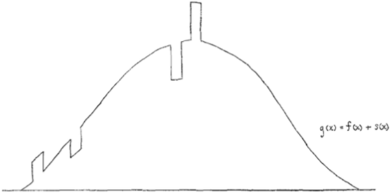
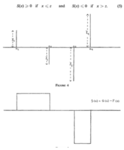


FIGURE 3

Une autre compréhension de la chose est de dire que $g = f + \epsilon$ où ϵ est un bruit blanc

Si ϵ est ce bruit blanc, notons $S = G - F$ la différence des cumulatives, et la somme $S(x) = \int_{-\infty}^{x} s(u)du$, alors, on dit que c'est un spread si S est positive puis négative.



2b.
Évaluations subjectives du risque

- Deux familles de préférences : Moyenne Variance et EU

Recherche d'un Critère de préférence

Pour comprendre le comportement d'un agent, et plus précisément les choix qu'il fait lorsqu'il doit choisir entre plusieurs loteries $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on essaye d'établir un *critère de notation* des différentes loteries.

Selon quels types de critères les agents économiques classent-ils les loteries ?

Critère Moyenne - Variance

- Critère lexicographique
- Une plus grande espérance de revenu satisfait l'agent
- Une moins grande variance de revenu satisfait l'agent

$$U(\tilde{X}) = E(\tilde{X}) - \frac{\beta}{\alpha} V(\tilde{X})$$

Espérance d'utilité

Définition

Plutôt que de prendre l'espérance de la lotterie, tout se passe comme si l'agent appréciait les différents revenus à travers un filtre. Ainsi, l'agent voit le revenu x à travers son utilité ressentie $u(x)$. *Son critère d'évaluation est l'espérance de ces utilités.*

$$U\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array}\right) = \frac{1}{3}\ u(x) + \frac{1}{2}\ u(y) + \frac{1}{6}\ u(z)$$

(EU suite) Utilité marginale décroissante pour la richesse

En général, on estime que la fonction $u(x)$ Von Neumann Morgerstern est concave.

Cette fonction d'utilité VNM permet de représenter ce que l'on observe souvent à travers les choix des agents, à savoir *l'utilité marginale décroissante pour la richesse*

x	$u(x) = \sqrt{x}$	$u(x) = \ln(x)$
100	10	2,30
1000	31,63	4,60
10.000	100	6,91
100.000	316,23	9,21
10^6	1000	11,51

Un accroissement de richesse génère un accroissement d'utilité qui est en relation inverse de la richesse déjà accumulée.

2c.
Évaluations subjectives du risque

- Equivalent certain et prime pour le risque

Equivalent Certain

Définition : On appelle équivalent certain d'une loterie, la somme d'argent détenue de manière certaine qui donne la même utilité que la loterie

Il est à noter que ce l'équivalent certain définit un critère universel de classement des loteries. Mais là encore, connaître l'équivalent certain donne moins d'information que la connaissance de la distribution elle-même.

▶**2 remarques :** - L'équivalent certain d'une loterie peut-être calculé quand on connait la forme des préférences d'un individu.
- Les paramètres des préférences d'un individu donné peuvent êtres calculés quand on connait l'équivalent certain de quelques loteries pour cet individu.

Prime pour le risque

Définitionn

on appelle la *prime de risque*, c'est à dire la différence entre le gain espéré, et l'équivalent certain (ou monétaire) de la lotterie.

À noter que l'équivalent certain et la prime pour le risque sont deux mesures subjectives des préférences des agents, qui elle-mêmes expriment les préférences de ces agents.

2d.
Évaluations subjectives du risque

- Aversion et prime pour le risque dans le cas EU

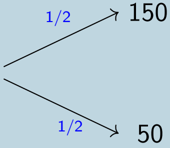
Prime pour le risque dans le cas EU

Cette fonction d'utilité VNM permet de mesurer ce que l'agent est prêt à payer pour échapper au risque. Ce que l'on appelle la *prime de risque*, c'est à dire la différence entre le gain espéré, et l'équivalent certain (ou monétaire) de la lotterie.

$$\pi = E(L) - EC$$

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie



- Sa richesse espérée est 100
- Son utilité est $\frac{1}{2}\ ln(150) + \frac{1}{2}\ ln(50) = 4,661$
- Or $4,661 = \ln(76,6)$

En résumé

sur une droite, on peut représenter pour une loterie, sa moyenne, que l'on note E, et son équivalent certain, que l'on note EC, la prime est la distance comprise entre EC et E (représentée en orange).

Principe : Plus un agent est averse au risque, plus la prime de risque est grande.

Que se passe t'il quand le risque est petit ?

Que signifie un petit risque ou plus communément *valeur connue à quelque perturbation près* ? Il s'agit de situations où une variable future n'a pas une réalisation x connue de manière sûre, mais une valeur $x + \tilde{\varepsilon}$ où $\tilde{\varepsilon}$ est une petite perturbation autour de x. En toute logique, on représente cette situation avec $\tilde{\varepsilon}$ dont la moyenne est nulle et où les réalisation de $\tilde{\varepsilon}$ sont petites.

Définition Un bruit *blanc* est une variable aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ dont la moyenne est nulle ($E(\tilde{\varepsilon}) = 0$) et dont les réalisations sont faibles en regard de la valeur (de position) x.

Prime pour le risque quand le risque est petit

Il est possible de faire une approximation de la prime pour le risque quand le risque est petit.

Proposition La prime de risque associé à un bruit blanc $\tilde{\varepsilon}$ de variance σ^2, lorsque la valeur principale (ou moyenne) est x peut être approximée par $\eta = \frac{1}{2}A(x)\sigma^2$, où $A(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ désigne le coefficient d'aversion absolue pour le risque.

- Remarquer que selon cette formule le calcul de la prime de risque est simple : <u>la prime est linéaire avec la variance du risque</u>
- Remarquer que plus $A(x)$ est grand, plus la prime de risque est élevée
- Remarquer enfin que $A(x)$ dépend de la dérivée seconde de la VNM, cad de la curvature de la VNM : plus la fonction est concave, (plus elle aplatit les haut revenus), plus la prime de risque est élevée

Approximation de la prime de risque quand le risque est petit (PREUVE de la proposition précédente)

Nous allons faire des approximations de l'utilité d'un agent exposé au risque "autour de x"

(1) ▶ Si η est la prime de risque : $u(x-\eta) \approx u(x) - \eta\ u'(x)$

(2) ▶ Pour toute réalisation de $\varepsilon = u(x+\varepsilon) \approx u(x) + \varepsilon u'(x) - \frac{1}{2}(\varepsilon)^2 u''(x)$

(3) ▶ En moyenne donc : $E[u(x+\varepsilon)] \approx u(x) + E[\varepsilon]u'(x) - \frac{1}{2}E[(\varepsilon)^2]u''(x) = u(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x)$

et donc, si on égalise l'équation (1) et l'équation (3) on trouve :

(4) ▶ $$\eta = \frac{1}{2}\frac{-u''(x)}{u'(x)}\sigma^2$$

Degré d'aversion au risque

Vous disposez d'une richesse de 100 et faites face au risque de gagner ou perdre 50 avec égale probabilité. Soit π ce que vous êtes prêt à payer pour échapper au risque.

Degré d'AR	π
0	00.0
1	13.4
4	37.8
10	46.0

Décrire les positions risquées que vous avez si vous contractez une assurance au prix de la prime de risque.

Spread et Espérance d'utilité

Rothschild et Stiglitz (1970) publient un critère partiel pour l'évaluation de deux loteries quand l'une est un MEAN PRESERVING spread de l'autre :

Théorème : Si la loterie $\mathcal{B}$ est un MPS de la loterie $\mathcal{A}$, alors, pour tout agent dont les préférences sont de types espérance d'utilité, dont la fonction VNM est concave, alors

$$U(A) \geq U(B)$$

on peut compléter ce théorème avec le théorème indiquant que pour toute loterie $\mathcal{A}$ et pour toute distribution dégénérée W, on a pour tout agent dont les préférences sont de types espérance d'utilité, dont la fonction VNM est croissante, alors $U(A+W) \geq U(A)$

Preuve

Calculer $EU(\mathcal{B}) - EU(\mathcal{A})$ comme la limite de l'intégrale $\int_X^Y u(x)(f(x) - g(x))dx$ en faisant une intégration par partie, et en se plaçant dans le cas $X < Z < Y$.

Coefficient d'aversion absolue pour le risque

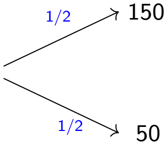
Comme il a été défini plus haut, l'AVERSION ABSOLUE POUR LE RISQUE au sens de ARROW-PRATT est un coefficient qui dépend de l'ordre de grandeur du risque que l'on subit. Il se définit comme :

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$$

- Remarquer que ce coefficient est POSITIF quand la fonction $u(\cdot)$ est concave
- Remarquer que ce coefficient varie avec x : cela signifie que quand la richesse varie, le comportement face au risque varie.
- Dans les exemples standards, on verra que $A(x)$ est décroissante avec x : plus les agents sont riches, moins ils sont averses au risque.

Aversion décroissante avec la richesse

Exemple Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie



Comment votre prime de risque évolue si votre richesse initiale est de 1000 ?

Comment votre prime de risque liée au risque de gagner ou perdre 50 avec égales probabilités évolue si votre richesse passe de 100 à 1000 ?

Il est communément accepté que celle-ci décroît.

CARA : Aversion constante avec la richesse

Un exemple important étudié par la littérature est CARA : Constant Absolute Risk Aversion. C'est par définition lorsque

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha \qquad \forall x$$

en intégrant, il vient

$$\ln(u'(x)) = -\alpha x + \ln(\beta) \quad \Longleftrightarrow u'(x) = \beta \exp(-\alpha x)$$

ce qu'on intègre sous la forme

$$u(x) = \gamma(1 - \exp(-\alpha x))$$

avec la condition $u(x) = 0$ et $\gamma\alpha = \beta$, α, β et γ étant des constantes.

Mesurer son aversion pour le risque

How you make decisions in a world with uncertainty will depend on how averse you are to risk. Economists define risk aversion in one particular way that we will discuss later. In order to measure a person ?s level of risk aversion, Charles Holt and Susan Laury* devised the following test. In it you will be shown a set of 10 decisions where you are asked to choose between lottery pairs with one lottery labeled A and one lottery labeled B. For example, one pair of lotteries might contain lottery A, which offers you a 40% chance of gaining 200$ and a 60% chance of gaining 160$, and lottery B, which offers a 40% chance of gaining 385$ and a 60% chance of gaining only 10$. For each pair from 1 to 10, you will be asked to state which you prefer. More precisely, look at the ten pairs of lotteries below, which are run by throwing a ten-sided die and choosing lottery A or B depending on what number is shown face up.

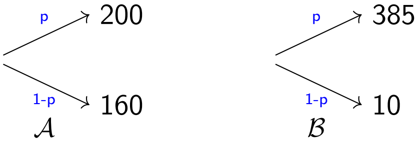
Les loteries proposées dépendent du jet d'un dé à dix faces

	Option A	Option B
Decision 1	200 si le résultat est 1, 160 sinon	385 si le résultat est 1, 10 sinon
Decision i	200 si le résultat in [1,i], 160 sinon	385 si le résultat in [1,i], 10 sinon
Decision 10	200 si le résultat in [1,10], 160 sinon	385 si le résultat in [1,10], 10 sinon

Et vous, pour ces dix choix quelle loterie choisissez vous, A ou B ?
Répondre par un 10-uplet $(x_1, x_2, x_3, ..., x_10)$ où $x_i \in \{A, B\}$.

Représentation des choix précédents et premières réactions

Il s'agit de choisir entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour différentes valeurs de $p \in \{0,1;0,2;0,3;0,4;0,5;0,6;0,7;0,8;0,9;1\}$



On voit que $\mathcal{B}$ est un spread de $\mathcal{A}$, dont la moyenne peut être cependant plus grande, et dont la valeur haute, 385, pourrait être attractive, en particulier quand p est élevé. Ci-après les moyennes et les variances calculées pour les différentes valeurs de p

Analyse théorique des choix précédents

1) on préfère $\mathcal{A}$ pour p petit et $\mathcal{B}$ pour p grand et ceci quelque soit la fonction VNM croissante. En effet, la différence est la somme de deux termes croissants

$$U(\mathcal{B}) - U(\mathcal{A}) = p\Big(u(385) - u(200)\Big) - (1-p)\Big(u(160) - u(10)\Big)$$

Le p, notons-le $\bar{p}$, pour lequel on décroche de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ est un signal de l'aversion pour le risque de l'agent qui a répondu en vérité aux dix questions.

2) si $\mathcal{B}$ est préféré à $\mathcal{A}$ pour p, alors $\mathcal{B}$ est préféré à $\mathcal{A}$ pour p pour un agent plus averse au risque. On étudie la différence, fonction de l'aversion pour le risque, avec f concave.

$$\begin{aligned} U(\mathcal{B}) - U(\mathcal{A}) &= p\Big(f(u(385)) - f(u(200))\Big) + (1-p)\Big(f(u(10)) - f(u(160))\Big) \\ &\geq pf'(u(385))\Big(u(385) - u(200)\Big) + (1-p)f'(u(10))\Big(u(10) - u(160)\Big) \\ &\geq f'(u(385))\Big[p\Big(u(385) - u(200)\Big) + (1-p)\Big(u(10) - u(160)\Big)\Big] \geq 0 \end{aligned}$$

Plus le p pour lequel on décroche de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ est grand, moins l'agent qui a répondu en vérité aux dix questions est averse au risque.

3) $\mathcal{B}$ est un spread de $\mathcal{A}$ avec une moyenne inférieure pour $p \leq 0,4$ et donc, pour un agent averse au risque, on devrait préférer $\mathcal{A}$ jusque au moins $p \leq 0,4$.

4) L'agent neutre au risque préfére $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ pour $p \leq 0,4$ et $\mathcal{B}$ à $\mathcal{A}$ pour $p \leq 0,5$ En effet, $U(\mathcal{B}) - U(\mathcal{A}) = p\Big(385 - 200\Big) - (1-p)\Big(160 - 10\Big) = 335p - 150 \geq 0 \iff p \geq \dfrac{150}{335} =$ $0,448..$ Ceci dit, ce dernier point est aussi un corollaire du point 3)

<u>On conclue que tout agent averse au risque devrait choisir $\mathcal{A}$ pour $p \leq 0,4$ et plus $\bar{p}$ est élevé, plus l'agent est averse au risque.</u>

Résultats de l'expérience

Now that you know what we mean when we categorize a person's attitude toward risk, you can see how the Holt-Laury test can be used to do so. Note that in the 10 decision problems offered in the test, the expected monetary value is greater for lottery A than lottery B in the first 4. This reverses itself on decision 5, where lottery B has a higher expected monetary value. Because a risk-neutral person chooses only on the basis of expected monetary returns, such a person would choose lottery A in decisions 1-4 but switch to lottery B from decision 5 onward. Note also that lottery A always con- tains less extreme payoffs than lottery B in that it pays either 200 or 160 with various probabilities. It is the safer option. Past decision 4, however, it is also the decision with the smaller expected payoff, so a risk-averse decision maker would be one that would be willing to trade off some expected payoff for a more secure reward. Hence, if you are risk averse, you would keep choosing A past decision 4 for some time. A risk pre- ferrer would do the opposite. He or she would be so eager to get the big prize, 385, that he or she would switch much earlier to B. So by noting when a subject decides to switch from A to B, Holt and Laury can infer something about the subject's attitude to- ward risk. If you want to give yourself this test, go to Charles Holt's Vecon Web page at http://veconlab.econ.virginia.edu/admin.htm.