

NB : documents et calculatrices autorisés

Excepté le dernier exercice, à rendre sur une copie d'examen, les exercices sont à faire sur le sujet d'examen. Il est demandé de répondre aux questions oui/non type QCM, puis, d'argumenter avec précision les réponses, dans les encadrés correspondants.

1 Possibilités d'investissement en combinant des actifs financiers

Pour chacune des questions suivantes, il est demandé au candidat de cocher sur le sujet les cases correspondant aux affirmations justes, puis, quand il y a un encadré, de justifier les réponses qui auront été données (le candidat doit développer sa réponse sur la feuille intercalaire s'il n'a pas assez d'espace).

On étudie une économie financière à deux états de la nature dans laquelle tous les agents ont des préférences pour les actifs financiers de type moyenne-variance ; sous cette hypothèse, un actif est décrit soit par l'ensemble des rendements nets, dans chaque état de la nature, soit, plus simplement, par l'espérance de ces rendements et l'écart-type de ces rendements. Les actifs que l'on considère sont $A(1, -1)$ et $B(-0, 5, +1)$ (en d'autres termes le rendement net de A est de $+100\%$ dans le premier état de la nature ou de -100% dans le second état de la nature.

1) Si un agent investit 100 € dans l'actif A et 200 € dans l'actif B , il est toujours vrai, lors de la réalisation de l'incertitude et des paiements de ces actifs

- qu'il reçoit 100 euros de l'actif A dans le premier état de la nature
 - qu'il reçoit 200 euros de l'actif A dans le premier état de la nature
 - qu'il reçoit 250 euros, tous actifs confondu, dans le premier état de la nature.
- de l'actif A il reçoit $100+100=200$ et de l'actif B : $100-, 5 * 100 = 50$.

2) Les portefeuilles suivants qui combinent les actifs A et B sont meilleurs que l'actif A

- OUI, en ne prenant que l'actif B
- OUI, en combinant A et B à parts égales
- Oui, en combinant $\frac{1}{7}$ de A et $\frac{6}{7}$ de B .

On calcule pour tous ces actifs et pour l'actif A aussi le rendement et l'écart-type. On fait l'hypothèse (donnée lors de l'examen) que les deux états sont équiprobables

Actif A : $r(A) = 0$ A² donne 1 à coup sûr : $Var(A) = 1$ $\sigma(A) = 1$.

Actif B : $r(B) = (, 5)/2 = 1/4 (B - EB)^2$ donne $(, 75)^2$ à coup sûr : $Var(B) = (, 75)^2$
 $\sigma(B) = (, 75) = 3/4$.

Actif D comprenant A et B à parts égales, soit D(1/4, 0) : $r(D) = 1/8 (D - ED)^2$
 donne $(1/8)^2 1$ à coup sûr : $Var(D) = (1/8)^2$ $\sigma(D) = 1/8$.

Actif F combinant 1/7 de A et 6/7 de B, soit F(-2/7, 5/7) : $r(F) = 3/14 (F - EF)$
 a pour rendement $-1/14$ dans le premier état de la nature et $1/7$ dans le second état :
 $Var(F) = 195/(2 * 196)$ $\sigma(F) \approx 0,70$.

On constate que ces trois actifs ont un rendement moyen positif, donc supérieur à A et un écart type inférieur à celui de A (qui est 1). Donc, ils sont meilleurs sur ces deux critères, donc ils sont meilleurs que A : les trois coches sont bonnes.

3) On peut obtenir un actif sans risque en combinant l'actif A et l'actif B

- Jamais
- OUI, en combinant A et B à parts égales
- OUI, en combinant $\frac{1}{7}$ de A et $\frac{6}{7}$ de B.

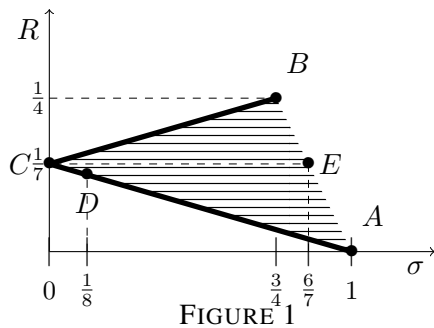
Supposons que je combine les actifs A et B en prenant α de A et $1 - \alpha$ de B. J'obtiens le vecteur de rendements C_α suivant : $C_\alpha (\alpha - \frac{1-\alpha}{2}, -\alpha + (1 - \alpha)) = (\frac{3\alpha-1}{2}, 1 - 2\alpha)$.

Cet actif est sans risque si le rendement est identique dans les deux états de la nature soit si $\frac{3\alpha-1}{2} = 1 - 2\alpha$ soit encore $3\alpha - 1 = 2 - 4\alpha$, soit $\alpha = 3/7$. On obtient alors l'actif $C(1/7, 1/7)$.

Aucune des trois coches n'est à cocher.

4) En considérant la figure 1 suivante où l'on a tracé trois points de coordonnées respectives $A(1, 0)$, $B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $C(0, \frac{1}{7})$, $D(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ et $E(\frac{6}{7}, \frac{1}{7})$, dire quelles sont les assertions vraies. Développer vos réponses et commenter plus généralement ce que permet d'atteindre la combinaison des deux actifs A et B la sur la feuille intercalaire.

- Le point D correspond au portefeuille combinant A et B à parts égales
- Le point C correspond au portefeuille combinant $\frac{1}{7}$ de A et $\frac{6}{7}$ de B
- La partie hachurée (de limites A, B et C) contient l'ensemble des portefeuilles qui combinent A et B
- Le portefeuille E est disponible dans cette économie.



La première et seconde coche sont bonnes, d'après les questions 2 et 3. On en déduit que toutes les combinaisons de portefeuilles C_α sont soit sur le segment A-C lorsque $\alpha < 3/7$ soit sur le segment C-B lorsque $\alpha > 3/7$. Il n'y a pas d'autres portefeuilles qui sont atteints. Ainsi les deux dernières coches ne sont pas bonnes.