ELEMENTS DE CORRECTION

1 Couverture d'une compagnie aérienne

Une compagnie aérienne cotée en bourse vend au prix p un billet d'avion. Elle a néamoins à la date de la vente une incertitude sur le coût de la prestation vendue (en particulier sur le coût du carburant). On supposera dans cet exercice que le coût de la prestation est $0,7p$ dans le premier état de la nature avec probabilité $1/2$ et qu'il est de $1,1p$ dans le deuxième état de la nature avec probabilité $1/2$.

1) Répondre en justifiant les réponses dans l'encadré : la compagnie peut se couvrir, partiellement,

- par l'achat d'une option sur le prix du carburant — OUI☒ NON☐
- par la vente de plusieurs de ses actions, pour une valeur égale à p — OUI☐ NON☒
- en ne faisant rien, puisque le profit moyen, concernant cette vente de billet, est positif — OUI☐ NON☒

La réponse traditionnelle à la prise de risque qu'occasione la vente d'une prestation future dont le coût est risqué est une couverture, en particulier sur le facteur de risque. Donc ici, une option sur le prix du carburant.
Vendre une action ne devrait pas diminuer le risque occasionné par la vente d'un billet. Ou indirectement. Si le prix du carburant augmente, le profit de la firme diminue, la valeur de ses actions aussi, et donc, c'est quelqu'un d'autre qui supporte cette baisse. Mais bon, ce n'est pas a priori un outil de couverture
Ne rien faire est ne pas couvrir le risque. C'est envisageable s'il n'y a pas d'instruments financiers disponibles qui améliorent le risque. Mais l'argument selon lequel l'espérance du risque est positive n'est pas suffisant pour ne pas se couvrir.

Au moment de l'émission du billet, la compagnie aérienne peut acheter un actif financier A, au prix unitaire q, dépendant des deux états de la nature ; A délivre -1 dans le premier état et +1 dans le second état.

2) Sous l'hypothèse que la compagnie aérienne est neutre au risque, quelle est la quantité (que l'on dénotera x) de cet actif que l'on peut anticiper qu'elle achètera ? $\boxed{x = 0}$

on rappelle que dans le premier état de la nature, le bénéfice net de la société est +30%, alors que dans le second état de la nature, la perte est de -10%. Le rendement net de la vente de billet est $(+30\%, -10\%)$.

Donc, a priori pour couvrir la compagnie, il faut un actif qui lui permette d'avoir plus dans le second état de la nature, en cédant un peu de son bénéfice dans le premier état de la nature : l'actif A est parfait. Le rendement net de l'actif est $\left(-\frac{1+q}{q}, \frac{1-q}{q}\right)$. Le rendement net moyen est $-\frac{1}{2}\frac{1+q}{q} + \frac{1}{2}\frac{1-q}{q} = -100\%$: la compagnie n'a pas du tout intérêt d'acheter cet actif.

On pouvait s'en rendre compte sans ce calcul de rendement négatif. En effet, l'espérance de l'actif est zéro. Cet actif n'augmente en rien l'espérance de la compagnie quand elle l'achète : elle la diminue de son prix q ! donc, la compagnie, lorsqu'elle est neutre au risque, n'achète jamais cet actif.

On suppose désormais que la compagnie est averse au risque et que sa fonction VNM est $\sqrt{x}$.

OUI☒ NON☐

3) Peut-on écrire l'utilité de la compagnie aérienne sous la forme :
$U = \frac{1}{2}\sqrt{A_1 + 0,3p - x(1+q)} + \frac{1}{2}\sqrt{A_2 - 0,1p + x(1-q)}$, et quelle serait l'interprétation des paramètres A_1 et A_2 ?

La valeur $A_1 + 0,3p - x(1+q)$ désigne le bénéfice brut de la vente de billet dans le premier état de la nature, augmenté de ce que délivre l'achat de x actifs et de A_1 qui est le capital de la compagnie dans le premier état de la nature. En effet, comme la compagnie n'est pas neutre au risque, on doit prendre en compte de ce qu'elle dispose pour mesurer ses choix d'aversion au risque.

De même, parrallèlement, la valeur $A_2 - 0,1p + x(1-q)$ désigne la perte brute t de la vente de billet dans le second état de la nature, augmentée de ce que délivre l'achat de x actifs et de A_2 qui est le capital de la compagnie dans le second état de la nature.

La compagnie étant VNM, la formule propose conformément la moyenne de l'utilité dans chacun des états de la nature.

OUI☐ NON☐

4) En supposant que la compagnie est averse au risque et qu'elle peut, disposer à l'achat de l'actif financier A défini dans la question 2, peut-on anticiper qu'elle achètera une quantité positive de cet actif ? Argumenter, en donnant le principe qui guide la réponse et en assortissant vos arguments de calculs. $\left[\text{On pourra si c'est utile supposer que } \frac{1+q}{4\sqrt{A_1 + 0,3p - x(1+q)}} < \frac{1-q}{4\sqrt{A_2 - 0,1p + x(1-q)}}\right]$

La compagnie investira en particulier dans l'actif si la dérivée en zéro de l'utilité est positive. Or, en reprenant les hypothèses de l'énoncé, cette dérivée est positive :

$$U'(0) = -\frac{1+q}{4\sqrt{A_1+0,3p}} + \frac{1-q}{4\sqrt{A_2-0,1p}} > 0$$

5) Sous les hypothèses de la question précédente, et avec $q = 0,1p$, calculer la quantité (que l'on dénotera x) de cet actif que l'on peut anticiper que la compagnie achètera dans les deux cas suivants

La quantité optimale x est obtenue quand la dérivée est nulle, cad quand on obtient l'équation :

$$\frac{1+q}{4\sqrt{A_1+0,3p-x(1+q)}} = \frac{1-q}{4\sqrt{A_2-0,1p+x(1-q)}}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(1+q)^2\big(A_2-0,1p+x(1-q)\big) = (1-q)^2\big(A_1+0,3p-x(1+q)\big)$$

et encore (mais c'est une forme qu'on ne travaillera pas directement)

$$((1+0,1p)^2\big(A_2-0,1p+x(1-0,1p)\big) = (1-0,1p)^2\big(A_1+0,3p-x(1+0,1p)\big)$$

On réécrit cette équation et on la résoud dans les deux cas particuliers, puis on donne les interprétations correspondantes.

CAS : $\underline{A_2 > A_1 > p}$

$x =$

CAS : $\underline{A_2 = A_1/2}$

$x =$

2 Investissement dans le modèle de Markowitz

On considère un marché financier dans lequel les agents économiques ont des préférences moyenne variance. Ces agents peuvent partager leur richesse entre un actif sans risque de rendement net r et un actif risqué d'écart-type σ et de rendement net moyen R.

1) Pour quelle raison devrait-on supposer que $R > r$?

Si $R \leq r$, alors, on a un actif risqué qui aurait à la fois un rendement inférieur à l'actif risqué, et qui par ailleurs est risqué. Deux critères qui, combinés pousseraient tous les agents à préférer strictement l'actif non risqué. L'actif risqué ne serait jamais demandé ni échangé entre les agents économiques.

On peut donc supposer qu'a contrario $R > r$.

2) Montrer que tous les portefeuille que peuvent obtenir les agents sont d'écart type $\alpha\sigma$ et de rendement net moyen $\alpha R + (1-\alpha)r$, pour $\alpha \in [0, 1]$. Quelle est l'interprétation de α ?

Soit un portefeuille P_α qui combine la proportion α d'actif risqué et la proportion $1 - \alpha$ d'actif non risqué.

Le rendement moyen de ce portefeuille est la moyenne des rendement $E(P_\alpha) = \alpha R + (1-\alpha)r$

La variance de ce portefeuille dépend de la variance de chacun de ses éléments, ainsi que de la covariance de l'actif risqué et de l'actif non risqué, selon la formule suivante

$VAR(P_\alpha) = \alpha^2 VAR(actifrisque) + (1-\alpha)^2 VAR(actifnonrisque) + 2\alpha(1-\alpha)VAR(actifrisque, actifnonrisque$

OR, la variance de l'actif non risqué est nulle. La Covariance de n'importe quel actif avec l'actif risqué est nulle aussi. Il s'ensuit que $VAR(P_\alpha) = \alpha^2 VAR(actifrisque) = \alpha^2\sigma^2$ et donc que $\sigma(P_\alpha) = \alpha\sigma$.

α est la proportion de l'actif non risqué.

3) Calculer le choix optimum de portefeuille pour un agent dont l'utilité est $U = E[P] - 50VAR[P]$ où $E[P]$ est le rendement net moyen du portefeuille et $VAR[P]$ est la variance du rendement net moyen.

Lorsque l'agent choisit le portefeuille P_α, on peut calculer précisément son utilité au regard de la question précédente :

$$U_\alpha = \alpha R + (1-\alpha)r - 50\alpha^2\sigma^2$$

Pour trouver la quantité la plus grande de cette expression, on en calcule la dérivée, et on cherche le point où cette dérivée s'annulle

$$U'_\alpha = R - r - 100\alpha\sigma^2$$

La dérivée s'annullle quand

$$\alpha = \frac{R-r}{100\sigma^2} \tag{1}$$

Deux cas : si $\dfrac{R-r}{100\sigma^2} \geq 1$, l'équation (1) donne la proportion exacte qui donne la plus grande utilité de l'agent

si au contraire $\dfrac{R-r}{100\sigma^2} > 1$, l'agent n'achète que de l'actif risqué.

3 Equilibre de marché avec deux agents averses au risque

Répondre aux questions oui/non, puis développer toutes les réponses dans l'encadré ci-dessous.

Il y a deux états de la nature, équiprobables. Tous les investisseurs sont averses au risque et ont la même fonction VNM $u(x) = \ln(1 + x)$. Les ressources initiale de l'économie se résument en une unité de chacun des deux actifs, dont les paiements contingents aux état de la nature sont :

$$a^1 = (1, 2) \quad a^2 = (2, 0)$$

1) Ces deux actifs rendent le marché complet OUI☒ NON☐

2) Le marché est à l'équilibre si les deux agents possèdent chacun la moitié des actifs et que le prix des actifs Arrow-Debreu élémentaires sous-jacentsont $q_1^* = 4$ et $q_2^* = 5$. OUI☒ NON☐

LE marché est complet

En effet, la matrice formée par les deux lignes est de rang 2, son discriminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 * 2 \neq 0$

Ou sinon, si l'on veut atteindre par la combinaison de $x\, a^1$ et de $y\, a^2$ n'importe quelle position risquée du type a, b, on le peut toujours en choisissant :

$$x = b/2 \quad y = a/2 - b/4$$

En effet, on doit avoir les deux conditions

$$x + 2y = a \qquad 2x + 0 = b$$

ce qui se résoud en

$$x = b/2 \quad y = a/2 - b/4$$

$***********$

Le marché est à l'équilibre quand chacun des deux agents possèdent la moitié de chacun des actifs, cad la position risquée $(\frac{3}{2}, 1)$.

En effet, remarquons qu'on est nécessairement à l'optimum, puisque les agents ont le même TMS.

Plus précisément, quand ils possèdent cette position risquée, leur TMS de bien de l'état 1 en bien de l'état 2, qui est génériquement $TMS = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{1+x_1}}{\frac{1}{2}\frac{1}{1+x_2}} = \dfrac{1 + x_2}{1 + x_1}$ vaut précisément $2/(\frac{5}{2)} = \frac{4}{5}$.

On remarque que ce TMS égale exactement le prix relatif du bien de l'état 1 en bien de l'état 2, puisque $q_1^*/q_2^* = 4/5$.

On est donc en situation d'équilibre. Chaque agent, au prix q_1^*, q_2^* choisit exactement d'acheter une moitié des deux actifs pour se trouver dans la position d'avoir $(\frac{3}{2}, 1)$ où le TMS égale $4/5$.

4 CAPM : deux exemples d'équilibre du marché financier

Il y a deux états de la nature, équiprobables. Tous les investisseurs ont des préférences moyenne varience. Les ressources initiales de l'économie se résument en une unité de chacun des deux actifs, dont les paiements contingents aux état de la nature sont :

$$a^1 = (1, 0) \quad a^2 = (0, 1)$$

le portefeuille de marché -dénoté M est donc composé de une unité de bien dans chacun des états de la nature.

On suppose que le marché financier est à l'équilibre, et on dénote respectivement par q_1 et q_2 les prix des actifs a^1 et a^2, et par $\frac{1}{1+r}$ le prix du portefeuille de marché.

1) Calculer les vecteurs de rendement net des trois actifs a^1, a^2 et M, et compléter le tableau suivant indiquant les espérances de rendement et les écarts types des vecteurs de rendement de ces trois actifs.

Notons respectivement R^1, R^2 et R^M ces trois vecteurs de rendements. On a :

$R^1 = \left(\frac{1-q_1}{q_1}, -1\right)$

$R^2 = \left(-1, \frac{1-q_2}{q_2}\right)$

$R^M = \left(\frac{1-\frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r}}, \frac{1-\frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r}}\right) = (r, r)$

Notons que par définition $q_1 + q_2 = \dfrac{1}{1+r}$

Il s'ensuit que l'espérance de rendement de l'actif a^1 est :

$$E[R^1] = \frac{1}{2}\frac{1-q_1}{q_1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1-2q_1}{q_1} = \frac{1-2q_1}{2q_1}$$

que l'écart-type du rendement de l'actif 2 est

$$VAR[R^2] = \frac{1}{2}(-1 - \frac{1-2q_2}{2q_2})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1-q_2}{q_2} - \frac{1-2q_2}{2q_2})^2 = \frac{1}{2}(\frac{-1}{2q_2})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2q_2})^2 = (\frac{1}{2q_2})^2$$

Enfin, [surprise], l'actif M est non risqué donc sa variance et son écart type sont nuls

De celà, on déduira dans la suite, que si le marché est à l'équilibre, il y a absence d'opportunité d'arbitrage, et donc qu'il n'y a qu'un seul actif sans risque, de rendement r, qui est justement l'actif de marché (qui dans les cas standards est risqué et a un rendement moyen plus élevé).

	Espérance de rendement	Ecart type du rendement
Actif a^1	$\frac{1-2q_1}{2q_1}$	$\frac{1}{2q_1}$
Actif a^2	$\frac{1-2q_2}{2q_2}$	$\frac{1}{2q_2}$
Actif M	r	0

2) Après avoir écrit l'équation d'équilibre, indiquer lesquelles parmi ces trois propositions sont vraies :

- les actifs a^1 et a^2, bien que risqué, ont le même rendement que le portefeuille de marché. OUI☒ NON☐
- À l'équilibre, $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{(1+r)}$ OUI☒ NON☐
- La frontière efficiente de cette économie financière se résume à un point de l'espace σ - R OUI☒ NON☐

L'équation d'équilibre du CAPM est, rappelons-le, pour tout actif de rendement moyen R et de coefficient β (où β est la covariance de l'actif avec l'actif de marché divisé par la variance de l'actif de marché) :

$$E[R] - E[R^0] = \beta(E[M] - E[R^0])$$

où R^0 est l'actif sans risque OR ICI, puisque l'actif de marché est l'actif sans risque, le membre de droite de l'équation s'annulle On en déduit donc que si le marché est à l'équilibre, alors, pour tout actif financier faisable (atteignable) dans ce marché :

$$E[R] = E[R^0]$$

cad qu'à l'équilibre dans ce cas très particulier le rendement moyen de tous les actifs financiers est égal au rendement de l'actif sans risque.

Cela se traduit dans notre économie, en reprenant le tableau de la question précédente, avec les trois actifs a^1, a^2 et M, par les équations

$$\frac{1-2q_1}{2q_1} = \frac{1-2q_2}{2q_2} = r$$

ce qui implique d'une part, que $q_1 = q_2$, et, puisque l'on savait que $q_1 + q_2 = \frac{1}{1+r}$ on en déduit à la lumière de l'équation précédente

$$r = \frac{(1-2q_1)+(1-2q_2)}{2q_1+2q_2} = \frac{1-(q_1+q_2)}{q_1+q_2} = \frac{1-\frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r}}$$

ce qui est consistent.

Il s'ensuit que

- les actifs a^1 et a^2, bien que risqué, ont le même rendement que le portefeuille de marché. OUI☒ NON☐
- À l'équilibre, $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{(1+r)}$ OUI☒ NON☐
- La frontière efficiente de cette économie financière se résume à un point de l'espace σ - R OUI☒ NON☐

La dernière coche, car en fait, l'équation (2) signifie qu'il n'y a qu'un point dans l'espace σ, R