Economie du risque (1)

Situation Risquées, y échapper ?

Représentations, comparaisons et et évaluations

ENASS - cycle ELSA - Arnold Chassagnon - Octobre 2012

Plan

1 **Introduction : demande de couverture et comportements induits par le risque**

2 **Représentations du risque**

3 **Evaluations du risque**

1

Introduction : demande de couverture et comportements induits par le risque

Accident et couverture

L'idée de couverture apparaît très tôt dans l'histoire de l'humanité. On la trouve en particulier dans les contrats d'assurance génois :

- Un capitaine finance son expédition par un emprunt couvert par l'assurance (sur le bateau et sur le chargement)
- si le bateau n'atteint pas sa destination, l'emprunt concerné n'est pas à rembourser.

Précautions contre un futur incertain

Keynes dans son ouvrage "The General Theory of Employment, Interest, and Money" introduit un motif de précaution pour justifier l'épargne

> *People save to protect against future risk and uncertainty*

- Il ne s'agit pas d'éliminer le risque futur ni la source du risque.
- il s'agit d'adoucir demain les possibles conséquences d'un risque (en acceptant de diminuer la richesse d'aujourdhui)

Choix humains et exposition au risque

Dans une vision moderne des choix humains, on ne dissocie pas les choix des risques induits. On trouve en filigrane une théorie du comportement humain chez François Ewald, entièrement marquée par la gestion des risques :

> **[L'homme émancipé]** *l'usage de sa liberté l'expose à mille accidents. Il ne s'affranchit que sous la condition de se conduire avec sagesse, de redoubler d'efforts et d'affronter des obstacles. En travaillant, il se blesse ; en naviguant, il s'expose aux naugrages ; en agissant il entre dans une lutte contre une foule d'obstacles, agir c'est vaincre . . .*

Analyse positive : rôle clé des probabilités

François Ewald voit dans le développement des probabilités la clé d'une analyse positive du comportement humain et de l'environnement dans lequel les choix se développent.

> *Le calcul des probabilités permettait d'articuler sur des démonstrations positives que les libertés laissées à elles-même, sans direction extérieure, n'en obéissaient pas moins à des lois. Le nouveau calcul attestait qu'un gouvernement par la liberté n'impliquait pas nécessairement désordre, qu'il était même le seul naturel.*

Une des directions ouvertes par cette analyse est que l'homme, par sa gestion des risque peut aussi influencer les probabilités.

- La chance n'est plus seulement dans le domaine d'une volonté divine,
- Elle est aussi le fruit de la gestion (individuelle et collective) des risques.

2

Représentations du risque

- distributions discrètes et continues
- Statistiques sur les distributions

Trois niveaux de risque

A la suite de Frank Knight, on peut distinguer trois degrés dans la connaissance imparfaite d'un agent soumis à l'alea :

1. l'incertain
2. le risque
3. l'expertise.

L'incertitude

On dira un agent dans l'incertitude en l'absence de toute connaissance positive d'une distribution de l'alea. Il connaît les différents états de la nature, mais ne peut y associer de probabilité. A ce stade, les opportunités d'échange mutuellement avantageuses sont limitées et la rationalité qui les supporte, rudimentaire.

Le risque

Au second degré, la connaissance d'une distribution permet à l'agent de se représenter le risque auquel il est soumis par des indicateurs comme la moyenne ou la variance d'un choc et d'établir des échelles de comparaison avec d'autres risques associés aux mêmes états de la nature. Ceci est le point de départ de la théorie de l'assurance.

L'expertise

Enfin, il est possible que d'autres agents aient une connaissance plus fine du vrai état de la nature (mais possiblement imparfaite). C'est alors que le cadre économique peut intégrer, par un mécanisme d'échange élaboré, une réduction de cette asymétrie de l'information.

Probabilités et distributions

- Cardan (1501-1576) : « le joueur savant ».

- Probabilité d'un événement = $\sharp$ résultats favorables / $\sharp$ événements possibles.

- « Pile » a une probabilité de $1/2$.
  Probabilité[obtenir un six en moins de 4 lancés] $>1/2$?
  $= 1 - (5/6)^4 = 0,5177$ (de Méré).

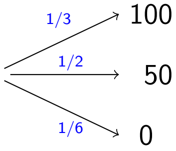
  Remarque : Probabilité[obtenir un six en moins de 2 lancés] =1-Probabilité[pas de six en 2 lancés] $= 1 - (5/6)^2 = 11/36 = 0,3056$.

Distributions du risque

Distributions discrètes

Il y a un nombre fini d'évènements possibles $i \in \mathcal{I}$, chacun avec probabilité p_i. Cette association à chaque évènement de sa probabilité, c'est ce qu'on appelle la **distribution** des risque. Cette distribution satisfait toujours la contrainte

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = 1$$



Distributions continues

Il y a un nombre infini, voire continu d'évènements possibles : chacun, pris isolément apparaît avec une probabilité nulle. La fonction de **repartition** décrit le poids relatif des évènements de faible gain par rapport aux évènements de gains plus élevés.

$$F(x) = Prob(X \leq x)$$

Fonctions de répartition

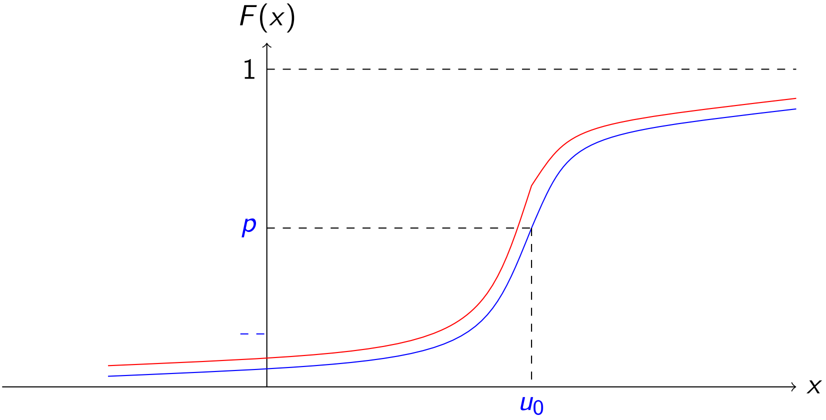
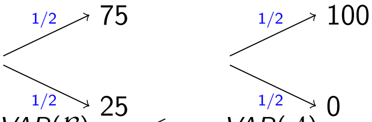


FIGURE: deux fonctions de répartitions : F et G

Statistiques

- **Moyenne** $\sum_i$ probabilités * richesses
  dans l'exemple précédent, moyenne=50
- **Variance** une mesure de la distance à la moyenne.
  exemple : la distribution $\mathcal{A}$ a une plus grande variance que la distribution $\mathcal{B}$.



$$VAR(\mathcal{B}) \leq VAR(\mathcal{A})$$

- **Modes** représente le/les évènements avec la plus grande probabilié
- **Fractiles** Divise la population en classes égales, représentées par une richesse pivot.

Statistiques - Pour aller plus loin

Il y a en fait deux familles de statistiques :

les *statistiques de position* dont l'objectif est de donner un ordre de grandeur des valeurs observées

les *statistiques de dispersion* qui évaluent le niveau d'étalement de la série autour de la valeur centrale.

Les paramètres de position (ou valeurs centrales) sont des valeurs numériques qui « résument » une série statistique en caractérisant l'ordre de grandeur des observations. Ils s ?expriment dans la même unité que les observations. Les paramètres de position permettent de situer la position de plusieurs séries comparables. Lorsque la distribution est parfaitement symétrique, mode, moyenne et médiane sont confondues.

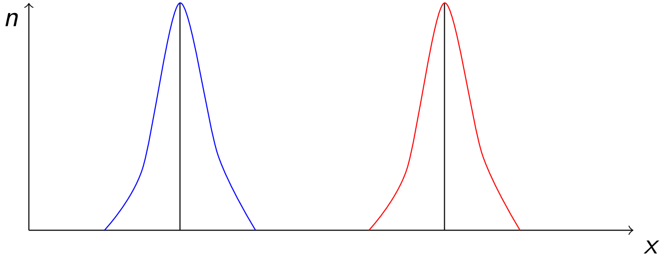


FIGURE: Les deux courbes ont la même allure, mais ne se positionnent pas du tout au même endroit sur l'axe des valeurs (des modalités). Les paramètres de position le mettent clairement en évidence.

Moyenne arithmétique d'un ensemble de N nombres

Définition

La moyenne arithmétique de N nombres est égale à la somme de ces nombres divisée par leur nombre.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i} x_i$$

Exemple simple

3 individus, gagnent respectivement 10.000 euros, 20.000 euros et 30.000 euros. La moyenne de leur revenu est 20.000 euros.

Remarque

La moyenne arithmétique est exactement la quantité qui pourrait être identiquement distribuée à chaque individu. En effet, la conséquence directe de la définition de $\bar{x}$ est : $N\ \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$.

Moyenne arithmétique d'une distribution

Dans le cas d'une distribution, il faut prendre en compte la fréquence d'apparition de chacune des réalisations.

Cas discret : à partir du tableau de fréquences

Une variable X prend les valeurs x_i avec la fréquence f_i pour $i = 1, \ldots, N$. La moyenne de cette variable est

$$\bar{X} = \sum_i f_i \; x_i$$

- la comparaison avec la formule du transparent précédent est immédiate. $\frac{1}{N}$ est remplacé par la fréquence (individualisée) de chaque réalisation f_i.

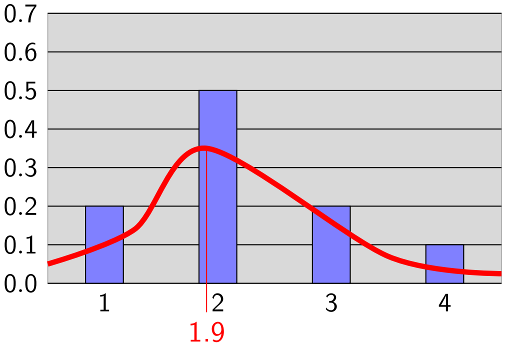
Cas continu : à partir de la fonction de distribution

Un variable X est définie par sa fonction de distribution $f(x)$, sa moyenne est

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f(x) dx$$

Le mode, défini pour toute variable aléatoire

Le mode d'une variable qualitative ou quantitative discrète : modalité dont la fréquence (absolue ou relative) est la plus élevée. Dans le cas où une variable continue a été regroupée en classes, le mode est la classe dont la fréquence est la plus élevée.

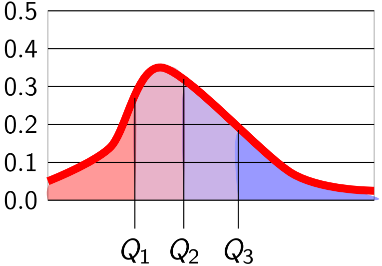


Dans l'exemple ci-dessus, le mode de la variable discrète est 2, celui de la variable continue, 1.9.

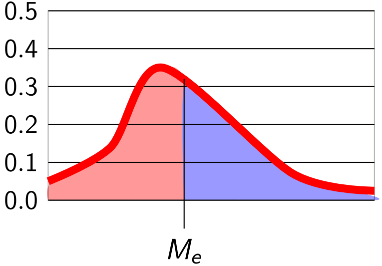
Les quantiles : séparer une distribution en parts égales

Lorsque la variable est ordonnée, si elle est continue, et parfois même quand elle est discrète ordonnée, on cherche à représenter les différentes parties d'une distribution. On nomme *quantiles* les valeurs qui permettent de séparer la distribution en parts égales. L'opération varie avec le nombre de parts.

Dans le cas d'une séparation en quatre, les *quartiles* sont les valeurs qui partagent la distibution en 4 parties de 25%.



Dans le cas d'une séparation en deux, la *médiane* est la valeur qui partagent la distibution en 2.



Le quantile, défini pour les variable ordonnées

Definition

les quantiles sont les valeurs de la variable partageant la série classée par ordre croissant de la variable en k sous-ensembles égaux.

- $k = 2$ c'est la *médiane* M_e
- $k = 4$ c'est les *quartiles* Q_1, Q_2, Q_3
- $k = 10$ c'est les *deciles* $D_1, D_2, \ldots, D_9$
- $k = 100$ c'est les *centiles* $C_1, C_2, \ldots, C_{99}$

Calcul du $n^{\text{ième}}$ quantile $(n < k)$

- Classer les données en ordre croissant, et calculer les fréquences cumulées $F(x)$
- Si $\exists x_i \ / \ F(x_i) = n/k$: le $n^{\text{ième}}$ quantile est x_i.
- Si $\exists x_{i-1}, x_i \ / \ F(x_{i-1}) < n/k < F(x_i)$: le $n^{\text{ième}}$ quantile est x_i. On peut parfois considérer l'intervalle $]x_{i-1}, x_i]$ ou en faire la moyenne de x_{i-1}, x_i (dans le cas de la médiane, on parle d'intervalle médian).

Exemple

Modalité	Effectifs	Fréquences	Fréq. cumulées	Qi
2	1	0.1	0.1	
3	3	0.3	0.4	0.25
4	4	0.4	0.8	0.5 ; 0.75
6	2	0.2	1	
Total	10	1		

  Dans la pratique, il faut trouver les modalités dont la fréquence cumulée est "juste au-dessus" de 0.25, 0.5, 0.75

- Prouver dans l'exemple suivant que le nombre d'enfants median est 2

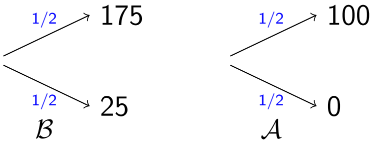
nb enfants	0	1	2	3	+ de 3
Effectifs	2	1	4	2	1

3

Evaluations du risque

Comparaisons - FSD

Certaines comparaisons admises par tous sont *robustes*. Ainsi, on préfèrera la loterie $\mathcal{B}$ à la loterie $\mathcal{A}$ si l'utilité des agents est croissante avec la richesse dans chaque état de la nature.



Définition : On dira qu'une distribution domine une autre distribution suivant le critère de *dominance stochastique de premier ordre* si cette distribution rémunère plus tous les états de la nature.

cependant, ce critère est loin de permettre de classer toutes les loteries. Ainsi, il sera implossible d'établir suivant ce critère un ordre de préférence entre la loterie $\mathcal{B}$ et le revenu certain de 50.

Recherche d'un Critère de préférence

Pour comprendre le comportement d'un agent, et plus précisément les choix qu'il fait lorsqu'il doit choisir entre plusieurs loteries $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on essaye d'établir une *notation* des différentes loteries.

Quels sont les critères acceptables de notation des loteries ?

Critère Moyenne - Variance

- Critère lexicographique
- Une plus grande espérance de revenu satisfait l'agent
- Une moins grande variance de revenu satisfait l'agent

$$U(\tilde{X}) = E(\tilde{X}) - \frac{\beta}{\alpha} V(\tilde{X})$$

Espérance d'utilité

Définition
Plutôt que de prendre l'espérance de la lotterie, tout se passe comme si l'agent appréciait les différents revenus à travers un filtre. Ainsi, l'agent voit le revenu x à travers son utilité ressentie $u(x)$. *Son critère d'évaluation est l'espérance de ces utilités.*

$$U\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array}\right) = \frac{1}{3}\ u(x) + \frac{1}{2}\ u(y) + \frac{1}{6}\ u(z)$$

Utilité marginale décroissante pour la richesse

En général, on estime que la fonction $u(x)$ Von Neumann Morgerstern est concave.

Cette fonction d'utilité VNM permet de représenter ce que l'on observe souvent à travers les choix des agents, à savoir *l'utilité marginale décroissante pour la richesse*

x	$u(x) = \sqrt{x}$	$u(x) = \ln(x)$
100	10	2,30
1000	31,63	4,60
10.000	100	6,91
100.000	316,23	9,21
10^6	1000	11,51

Un accroissement de richesse génère un accroissement d'utilité qui est en relation inverse de la richesse déjà accumulée.

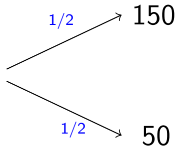
Prime pour le risque

Cette fonction d'utilité VNM permet de mesurer ce que l'agent est prêt à payer pour échapper au risque. Ce que l'on appelle la *prime de risque*, c'est à dire la différence entre le gain espéré, et l'équivalent certain (ou monétaire) de la lotterie.

$$\pi = E(L) - EC$$

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie



- Sa richesse espérée est 100
- Son utilité est $\frac{1}{2}\ ln(150) + \frac{1}{2}\ ln(50) = 4,661$
- Or $4,661 = \ln(76,6)$
- Sa prime de risque est donc $100 - 76,6 = 13,4$.

Aversion pour le risque

La prime de risque mesure votre degré d'aversion pour le risque.

Aversion pour le risque= refus des loteries d'espérance nulle.

Hétérogénéité de l 'attitude face au risque, chez les animaux

(abeilles, rats, ?) et chez l 'espèce humaine.

Degré d'aversion au risque

Vous disposez d'une richesse de 100 et faites face au risque de gagner ou perdre 50 avec égale probabilité. Soit π ce que vous êtes prêt à payer pour échapper au risque.

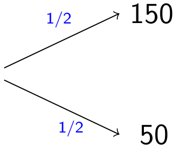
Degré d'AR	π
0	00.0
1	13.4
4	37.8
10	46.0

Décrire les positions risquées que vous avez si vous contractez une assurance au prix de la prime de risque.

Aversion décroissante avec la richesse

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie



Comment votre prime de risque évolue si votre richesse passe de 100 à 1000 ?

Comment votre prime de risque liée au risque de gagner ou perdre 50 avec égales probabilités évolue si votre richesse passe de 100 à 1000 ?

Il est communément accepté que celle-ci décroît.