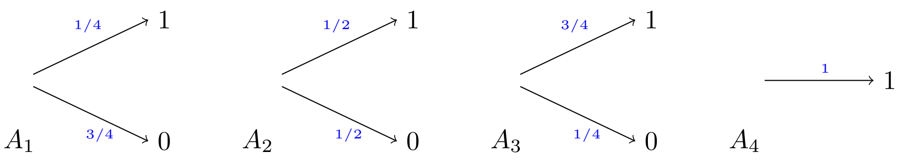
Exercices pour la première semaine d'économie théorique

Ces deux exercices permettent de revoir les différents acquis d'économie que vous avez au moment de commencer ce cours, et éventuellement que vous puissiez indiquer les quelques notions élémentaires qui seront nécessaires pour la suite.

Pour chacune des questions, il est demandé de compléter les tableaux qui sont proposés sur le sujet, et de justifier dans les encadrés qui suivent les réponses qui auront été données, en particulier les calculs ET la méthode qui conduit à ces calculs

1 Valorisation de plusieurs loterie pour un agent neutre au risque et pour un agent averse au risque

Soit les quatre loteries suivantes, A_1, A_2, A_3, et A_4 représentées comme suit :

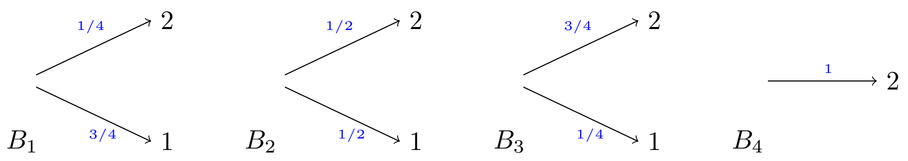


La valeur de ces loteries dépendent des préférences de ceux qui les détiennent. L'expression "valeur de la loterie" désigne classiquement l'équivalent certain, c'est-à-dire la valeur détenue de manière certaine qui donne à l'agent autant de satisfaction que de posséder la loterie. On considère un premier agent, monsieur V, qui est averse au risque, ayant des préférences de type espérance d'utilité et dont la VNM est $u(x) = \sqrt{x}$ et on note v_1, v_2, v_3, et v_4, la valeur respective de ces loteries pour l'agent V. On considère un second agent, neutre au risque, et on note a_1, a_2, a_3, et a_4, la valeur respective de ces loteries pour l'agent A.

1) Dans cette première question, on fait l'hypothèse que lorsque ces deux agents détiennent l'une des loterie A_i $(i = 1, \cdots, 4)$, ils ne disposent d'aucune autre ressource. Ils détiennent soit A_1, soit A_2, soit A_3, soit A_4 et c'est tout. Compléter le tableau suivant qui donne les valorisations de ces différentes loteries par les deux agents. [certaines cases du tableau sont déjà pré-remplies.] Commenter.

loterie	A_1	A_2	A_3	A_4
Valeur pour Monsieur A	$a_1 = 1/4$	$a_2 =$ ____	$a_3 = 3/4$	$a_4 =$ ____
Valeur pour Monsieur V	$v_1 = 0,0625$	$v_2 = 0,25$	$v_3 =$ ____	$v_4 =$ ____

2) Dans cette seconde question, on fait l'hypothèse que les deux agents disposent, en complément de l'une de ces loteries, un revenu égal à 1. Ils détiennent donc soit B_1, soit B_2, soit B_3, soit B_4 représentées comme suit :



Compléter le tableau suivant qui donne les valorisations de ces différentes loteries pour les deux agents (on donnera des valeurs approximées avec deux chiffres après la virgule). [(Arnold): A.N. $\sqrt{2} \approx 1,41$] Commenter.

loterie	B_1	B_2	B_3	B_4
Valeur pour Monsieur A	$5/4$	____	$7/4$	____
Valeur pour Monsieur V	$1,22$	$1,46$	____	2

3) Déduire des valorisations des loteries B_1, B_2, B_3, B_4 retenues dans la questions précédente, la valeur de détention des loteries A_1, A_2, A_3 et A_4 pour les deux agents A et V, quand ils détiennent déjà un revenu de 1. (Autrement dit, quel est la partie spécifique à ces loteries de l'équivalent certain). Commenter.

Loterie	A_1	A_2	A_3	A_4
Valeur pour Monsieur A	$a_1 = 1/4$	$a_2 =$ ____	$a_3 = 3/4$	$a_4 =$ ____
Valeur pour Monsieur V	$v_1 = 0,22$	$v_2 =$ ____	$v_3 = 0,72$	$v_4 =$ ____

4) Est-il vrai que la valeur des loteries A_i (pour $i = 1, 2, 3, 4$) puisse avoir varié quand l'agent qui les possède ne possède rien d'autre ou qu'il possède un revenu de 1. Expliquer en particulier ce qui se passe pour l'agent V. Le cas de l'agent A, neutre au risque, a-t'il quelque chose de particulier ? En développer le mécanisme.

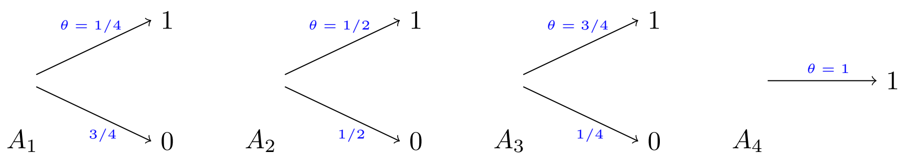
2 Vente d'un actif risqué dont les caractéristiques sont connues du vendeur et inconnues de l'acheteur

Il est demandé dans ce second exercice d'utiliser l'information qui est contenue dans l'énoncé du premier exercice (en indiquant où vous avez trouvé l'information). Pour chacune des questions suivantes, il est demandé de répondre aux questions type QCM et de justifier dans l'encadré qui suit les réponses qui auront été données.

Un agent économique possède une loterie qu'il désire vendre. cette loterie rapporte 1 avec une probabilité θ et 0 avec une probabilité $1 - \theta$. Ce vendeur est le seul à connaître la valeur de θ. Ce vendeur est averse au risque et sa fonction VNM est $u(x) = \sqrt{x}$. Il ne vend sa loterie (qu'on appelle parfois son actif) que lorsque le prix qui lui est proposé est supérieur ou égal à la valeur qu'il donne à cette loterie.

L'acheteur quant à lui est neutre au risque. Il ne connaît pas la valeur de θ mais il n'est pas totalement ignorant : il connaît en effet la distribution de θ : dans $1/4$ des cas θ égale à $1/4$, dans un autre quart des cas θ égale $1/2$, dans un troisième quart des cas, θ égale $3/4$ ou sinon, θ égale 1. On résume cette situation en disant que du point de vue de l'acheteur θ peut prendre l'une des quatre valeurs suivantes, avec equiprobabilité : $\theta = \theta_1 = 1/4$, $\theta = \theta_2 = 2/4$, $\theta = \theta_3 = 3/4$, $\theta = \theta_4 = 1$.

Pour une facilité de langage on dira que θ_i ($i = 1$ ou 2 ou 3 ou 4) est le type du vendeur et que A_i est la loterie (ou l'actif) détenue par ce vendeur et qu'il désire justement vendre. Suivant ces quatre possibilités l'actif se représente comme suit :



L'objet de cet exercice est d'étudier les conséquences de cette situation particulière dans laquelle le type i du vendeur est connu de lui seul et pas de l'acheteur. Que peut faire l'acheteur dans ce cas là ? On supposera tout au long de l'analyse que le vendeur vend s'il est indifférent entre vendre et ne pas vendre et qu'il ne possède rien d'autre que son actif.

1) Quel est l'actif qui a pour valeur $a = 1/2$ pour un acheteur neutre au risque

□ . . . . A_1 □ . . . . A_3

□ . . . . A_2 □ . . . . A_4

2) Pour le vendeur, la valeur de l'actif qu'il détient est l'équivalent certain de la loterie (calculé en prenant en compte la VNM $\sqrt{x}$). Par exemple détenir l'actif A_3 apporte au vendeur le même bien-être que détenir de manière certaine 0,5625. Dans la même logique, pour quelle réalisation du paramètre θ la valeur de l'actif est de 0,25 pour le vendeur ?

□ . . . . $\theta = 1/4$ □ . . . . $\theta = 3/4$

□ . . . . $\theta = 1/2$ □ . . . . $\theta = 1$

3) Si un acheteur offre d'acheter l'actif à un prix compris entre 0,25 et 0,36, quels seront les types de vendeurs qui accepteront cette offre ? [(Arnold): A. N. $\sqrt{0,25} = 0,5$; $\sqrt{0,36} = 0,6$]

□ . . *le vendeur de type* θ_1 □ . . *le vendeur de type* θ_2 □ . . *le vendeur de type* θ_3 □ . . *le vendeur de type* θ_4

Toujours en considérant le même type d'offre, avec quelle probabilité p cette offre est acceptée et, en suivant, quelle est la valeur moyenne $\tilde{a}$ que recevra l'acheteur. Cette stratégie est-elle profitable dans lorsque le prix de vente est fixé à 0,36 ?

□ . . $p = 2/4$ *et* $\tilde{a} = 0,375$ □ . . . $p = 1/4$ *et* $\tilde{a} = 0,25$

□ . . . . *stratégie profitable* □ *stratégie non profitable*

4) Si un acheteur neutre au risque offre un prix de $\frac{9}{16} = 0,5625$, quelle est la valeur moyenne $\tilde{a}$ de l'actif qu'il reçoit, et avec quelle probabilité p son offre est acceptée. Cette stratégie est-elle profitable ? [Ne pas oublier l'hypothèse selon laquelle le vendeur vend s'il est indifférent entre vendre et ne pas vendre.] Commenter, en comparant avec ce qui s'est passé dans la question 3.

□ . . $p = 2/4$ *et* $\tilde{a} = 0,375$ □ . . . . $p = 3/4$ *et* $\tilde{a} = 0,5$

□ . . . . *stratégie profitable* □ *stratégie non profitable*

5) Commenter les résultats que vous obtenez dans les questions 3) et 4). Plus précisément, indiquez ce qui se passe quand l'acheteur ne peut proposer qu'un prix unique, sans pouvoir différencier le type du vendeur. Donner une piste de ce que l'acheteur voudrait vouloir faire pour améliorer

celà.

On étudie dans la suite de l'exercice des transactions dans lesquelles l'acheteur peut n'acheter qu'une fraction des actifs du vendeur.

6) Quels sont les type (du vendeur) qui acceptent la proposition d'achat de seulement la moitié de leur actif au prix 0,50, et qui doivent donc, s'ils l'acceptent conserver l'autre moitié de leur actif —après une telle vente ils ont la distribution B_i :

$$B_i \begin{cases} \xrightarrow{\theta_i} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * 0,5 = \frac{3}{4} \\ \xrightarrow{1-\theta_i} \frac{0}{2} + \frac{1}{2} * 0,5 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

☐ . . *le vendeur de type* θ_1 ☐ . . *le vendeur de type* θ_2
☐ . . *le vendeur de type* θ_3 ☐ . . *le vendeur de type* θ_4

A. N. : $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ et $\dfrac{1}{3-\sqrt{3}} \approx 0,79$

Cette stratégie d'achat, prise isolément, conduit-elle à un profit nul pour l'acheteur ? OUI ☐ NON☐

7) Considérons maintenant la stratégie suivante de l'acheteur neutre au risque : il propose au choix le menu suivant : l'acheteur peut soit vendre tout son actif au prix unitaire $0,36$, soit vendre la moitié de son actif au prix unitaire $0,50$, soit, ne rien vendre du tout. En collectant les informations que vous aviez à la question 3 et à la question 6, et calculant puis en comparant pour chacun des types de vendeurs les utilités qu'ils auraient dans ces trois alternatives. En déduire : quels sont

les vendeurs qui ne vendent rien, ceux qui ne vendent que la moitié de leur actif au prix $0,50$ et ceux qui vendent tout leur actif au prix $0,36$. [Après avoir complété le tableau suivant, on pourra hachurer les cases représentant un comportement non optimal.]

type de vendeur	$\theta = 1/4$	$\theta = 1/2$	$\theta = 3/4$	$\theta = 1$
Utilité de ne rien vendre	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1
Utilité de vendre la moitié de l'actif au prix 0,50				
Utilité de vendre tout l'actif au prix 0,36	$0,60$	$0,60$	$0,60$	$0,60$

Cette stratégie est-elle profitable OUI ☐ NON☐