5

Equilibre et Bien-être

Radner et Arrow-Debreu

M1 - Arnold Chassagnon, Université de Tours, PSE - Automne 2017

Plan du cours

1. Demande pour le risque
2. Equilibre et efficacité
3. Exemples et exercices

Introduction

Efficacité structurante

Le concept d’efficacité de Pareto retenu en économie est relativement faible et admet comme efficace beaucoup d’allocations. On a cependant vu que ce concept appliqué à l’allocation du risque a des conséquences normatives importantes : les allocations efficaces sont telles que dans les états riches, chacun reçoit relativement plus que dans les états de la nature pauvre. On verra une autre conséquence : aucun agent ne devrait détenir un risque qui ne soit pas économique, comme un ticket de loterie.

Théorèmes du bien-être

Nous allons démontrer dans ce cours des théorèmes du bien-être avec un marché financier, analogues au théorèmes du bien-être dans une économie avec production. Nous analyserons comment les allocations efficaces sont implémentées par le marché, lorsque les hypothèses de la CPP sont vérifiées.

La concurrence est une hypothèse très importante : on suppose que tous les agents sont preneurs de prix, cad qu'ils sont individuellement trop petits pour avoir un impact sur les prix en agissant sur les quantités d'actifs qu'ils achètent ou qu'ils vendent.

Equilibre

Un équilibre avec marché financier est un ensemble de prix des actifs financiers tels que pour chacun de ces actifs, la quantité totale d'actifs demandés à ce prix est égale à la quantité totale d'actifs offerts à ce prix.

Définition Un équilibre concurrentiel est la donnée d'un portefeuille z^i pour chacun des investisseurs $i \in \{1, \ldots, I)\}$, d'un taux d'intérêt r et d'un ensemble de prix des actifs $p \in \mathbb{R}^k$ tel que z^i est la demande optimale de chaque investisseur étant donné le taux r et les prix p et tel que la la fonction de demande agrégée des actifs égale l'offre agrégée de ces actifs :

$$\forall k \quad \sum_{i=1}^{I} z_i^k(p) = Z^k$$

On appelle la fonction d'excès de demande agrégée pour un actif la demande totale pour cet actif, nette de l'offre totale. Les prix d'équilibres sont les prix pour lesquels les fonctions d'excès de demande agrégées sont nulles.

Trois motifs pour lesquels les agents investissent

- Mutualisation des risques : les agents n'ont pas les mêmes dotations et ils veulent lisser leur consommation sur l'ensembles des états de la nature.

- Assurance : les agents n'ont pas le même niveau d'aversion pour le risque et le moins risque-averse vend de la couverture au plus risque-averse,en l'échange d'une "prime de risque".

- Spéculation : les investisseurs ne partagent pas les mêmes croyances concernant l'évolution future des prix et des échanges sur les marchés d'actifs, et échangent en fonction de ces croyances différenciées.

1

Demande d'actifs risqué

- Le cas EU

Dotation initiale et revenu financier quand le marché est complet

Le marché est défini par un ensemble de titres, avec pour chacun un prix : (a^k, p^k). On suppose qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, et on note (q_ω) le système de prix des états correspondants.
On suppose qu'un agent a une utilité VNM strictement concave u et que sa dotation initiale est $e = (e_\omega)$.

si le marché est complet, la dotation initiale de l'agent est convertible en valeur, et a un prix unique dépendant du prix des états : $w = \sum_\omega q_\omega\, e_\omega$, que l'on appellera la richesse de l'agent.

Le programme optimal de l'agent

L'agent peut échanger la position risquée qu'il a sur le marché en achetant un portefeuille de titres (z^k).

Son programme optimal est :

$$\begin{array}{rl} \max_z & \sum_\omega \pi_\omega u\left(e_\omega + \sum_k z^k a_\omega^k\right) \\ s.c. & \sum_k z^k p^k = 0 \end{array} \tag{1}$$

Notez bien dans cette formule que l'espérance d'utilité se calcule à partir des probabilités des états qui ne sont pas nécessairement, comme on l'a vu dans le premier chapitre égales aux probabilités risque neutre.

Remarquez aussi que l'on peut écrire ce programme sous la forme suivante qui peut vous sembler plus intuitive

$$\begin{array}{rl} \max_z & \sum_\omega \pi_\omega u\left(\sum_k z^k a_\omega^k\right) \\ s.c. & \sum_k z^k p^k = w \end{array}$$

Equivalence marché financier & de biens contingents

Pour modifier sa position risquée, le programme précédent propose aux investisseurs d'acheter des actifs financiers. Il semblerait naturel, de pouvoir acheter directement un vecteur de bien contingents, puisque les puisque les actifs Arrow élémentaires ont leur prix.

Théorème Si les marchés sont complets et sans arbitrage, le programme de l'investisseur risque averse ayant une utilité strictement concave u et une dotation initiale (e_ω) s'écrit aussi

$$\begin{array}{rl} \max_z & \sum_\omega \pi_\omega u\left(c_\omega\right) \\ s.c. & \sum_\omega q_\omega c_\omega = \sum_\omega q_\omega e_\omega = w \end{array} \tag{2}$$

Remarquez comment sont construites les sommes dans ce second programme : dans l'objectif de l'investisseur, on se réfère aux probabilités des états de la nature π_ω alors que dans la contrainte, on se réfère au prix d'équilibre des actifs Arrow-Debreu élémentaires (et donc, implicitement aux probabilités risque neutre).

Preuve du théorème d'équivalence

Le résultat provient de la complétude du marché. En effet, après avoir enlevé tous les actifs redondant, un vecteur de bien contingent peut s'écrire de manière unique $\forall \omega$, $c_\omega = e_\omega + \sum_k z^k a_\omega^k$. La condition $\sum_k z^k p^k = 0$ est équivalente à la condition $\sum_\omega q_\omega c_\omega = \sum_\omega q_\omega e_\omega$ car l'application qui à tout portefeuille associe sa valeur, $z \mapsto \sum_k z^k a_\omega^k$ est bijective quand les marchés sont complets et sans arbitrage.

Conditions premières du programme de l'investisseur

Les conditions premières du programme de l'investisseur s'écrivent donc :

$$\pi_\omega u'(c_\omega) = \frac{1}{\lambda} q_\omega \tag{3}$$

où λ désigne le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de budget intertemporelle.

On peut interpréter cette condition en l'écrivant sous la forme $q_\omega = \lambda \pi_\omega u'(c_\omega)$: le prix de l'actif Arrow-Debreu élémentaire qui délivre 1 euro dans l'état ω est proportionnel

- à l'utilité marginale de la richesse dans cet état de la nature. Si l'utilité marginale de la richesse est très élevé, le prix de cet Actif Arrow-Debreu très apprécié sera élevé. Si l'utilité marginale de la richesse est très faible, le prix de cet Actif Arrow-Debreu peu apprécié sera faible.
- à la probabilité d'occurrence de l'état. S'il arrive plus souvent, son prix sera plus élevé

Conditions premières avec le taux d'intérêt

Souvenez-vous dans le premier chapitre, on avait établi un lien entre les probabilités risque neutre et le taux d'intérêt de la période 0 à la période 1 :

$$q_\omega = (1+r)\pi^*_\omega$$

Il s'ensuit que l'on peut réécrire les conditions premières

$$\frac{\pi^*_\omega}{\pi_\omega} = (1+r)\lambda u'(c_\omega)$$

Cette identité signifie que le changement des probabilités actuarielles π_ω aux probabilités risque neutre π^*_ω est proportionnel aux utilités marginales de la richesse dans les différents états.

Facteur d’escompte stochastique

Définition On appelle facteur d’escompte stochastique le terme

$$M_\omega = \pi^*_\omega \pi_\omega \frac{1}{1+r}$$

Ce facteur permet d’escompter au prix d’équilibre n’importe quelle dotation de vecteur contintgent aux états de la nature. On a en effet pour tout vecteur $c = (c_\omega)$

$$P(c) = \sum_\omega \pi_\omega M_\omega c_\omega$$

Tout se passe comme si à l’équilibre, les flux dans les différents états de la nature n’étaient pas escomptés avec le même facteur.

Exemple

On considère une économie concurrentielle d'échange avec anticipations rationnelles, un seul produit, choisi comme numéraire, deux titres et trois dates. Il existe un individu représentatif, dont l'utilité intertemporelle U est de type VNM, avec un facteur psychologique d'escompte égal à 1. L'utilité instantanée de la consommation c est $u = Log(c)$.

Un titre peut s'acheter ou se vendre à la date 0. En date 1, il n'a plus de valeur. Un des deux titres est appelé « minuscule » et un autre « majuscule ». Après la date 0, deux états du monde sont possibles en date 1, ils sont indicés par 1 et 2, chacun se produit avec la probabilité 1/2.

Les dividendes du titre minuscule sont notés di dans l'état i=1 à 2, et idem avec Di. Le prix du titre minuscule est noté qi et celui du titre majuscule Qi. L'économie dispose de n unités de l'actif minuscule et de N unités de l'actif majuscule.

Trouver les prix d'équilibres de ces deux actifs financiers.

A.N. $(d_1, d_2) = (1, 0)$, $(D_1, D_2) = (1, 1)$, $n = 1$ et $N = 1$.

Résolution de l'exemple

On résoud l'exemple à l'envers. On sait quelle est la dotation de l'agent représentatif à l'équilibre, $(nd_1 + ND_1, nd_2 + ND_2)$. Les équations premières du programme de l'investisseur s'écrivent

$$\frac{1}{2}\frac{1}{c_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{nd_1 + ND_1} = \frac{1}{\lambda}q_1 \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{c_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{nd_2 + ND_2} = \frac{1}{\lambda}q_2$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{nd_2 + ND_2}{nd_1 + ND_1} \quad \text{A. N. :} \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{N}{n+N} = 1/2 \leq 1$$

- Remarquer qu'on obtient un prix relatif q_2/q_1 (puisqu'ici au départ il n'y a pas de consommation en période 0 ni de taux d'intérêt)
- Le prix relatif de l'actif 1 est d'autant plus élevé que le nombre d'actif 1 disponible dans l'économie est faible.

2

Equilibre et Bien-être

Faisabilité et optimalité

Définition Une allocation (c^i_ω), avec $c^i_\omega \geq 0$ est réalisable *dans tous les états de la nature* si la consommation totale dans chaque état égale la consommation disponible dans cet état :

$$\sum_{i=1}^{i} c^i_\omega = e_\omega \quad \forall \omega$$

Définition Une allocation (c^i_ω) est optimale au sens de Pareto

si elle est réalisable et qu'il n'existe aucune autre allocation réalisable qui donne plus de bien-être à tous les agents, avec au moins une inégalité stricte.

Principe de Mutualisation des risques de BORCH

Proposition Si les agents sont strictement averse au risque et ont des croyances identiques (cad les mêmes π_ω, alors si la dotation globale est identique dans deux états, la consommation à l'optimum, *pour tous les agents*, doit être identique dans ces deux états :

$$e_\omega = e_{\omega'} \quad \Rightarrow \quad c^i_\omega = c^i_{\omega'}$$

Par contradiction, supposons que ce résultat ne soit pas vrai et qu'il existe par exemple une allocation telle que pour un agent i, $c^i_1 \neq c^i_2$, alors que la richesse agrégée dans ces deux états est identique. Considérons alors, pour cet agent i une modification à la marge de son vecteur de consommation contingente, qui lui donne en lieu et place de c^i_1 et c^i_2 la même quantité dans les deux états $\dfrac{\pi_1 c^i_1 + \pi_2 c^i_2}{\pi_1 + \pi_2}$. Manifestement, cette allocation est réalisable, et à cause de l'inégalité de Jensen, elle est meilleure pour l'investisseur. QED.

Caractérisation des allocations optimales

Théorème Une allocation (c^i_ω), avec $c^i_\omega > 0$ est optimale au sens de Pareto si et seulement si il existe des poids non négatifs $(\lambda^i)_{i \leq I}$ et $(\mu^\omega)_\omega$ tels que :

$$\lambda_i u'(c^i_\omega) = \mu_\omega \quad \forall \omega \in \Omega, \forall i \in \{1, \ldots, I\} \tag{4}$$

- Donc, à λ_i près, tous les individus ont la même utilité de la richesse dans les différents états de la nature.
- Autrement dit, ce qui change d'un individu à l'autre, c'est la gamme des utilités marginales, mais l'évolution de ces utilités marginales d'un état de la nature à l'autre est identique
- Remarquez que ces poids sont d'autant plus faibles que la consommation de chaque individu est élevée ($c'' < 0$) et sont donc monotones avec la richesse agrégée.

Deux théorèmes du bien-être

Enfin, l'équation décrivant les optima des Pareto

$$\lambda_i u'(c_\omega^i) = \mu_\omega \quad \forall \omega \in \Omega, \forall i \in \{1, \dots, I\}$$

a des ressemblances fortes avec l'équation qui caractérise les équilibres :

$$\pi_\omega u'(c_\omega) = \frac{1}{\lambda} q_\omega$$

Théorème a) Pour toute allocation optimale de Pareto (e_i^ω) il existe un système de prix q^ω d'équilibres, cad d'un équilibre autarcique.

b) Pour toute allocation initiale des richesses (e_i^ω) il existe un équilibre, cad un système de prix q^ω d'équilibre qui permet aux agents de passer de leur dotation initiale à une distribution des richesses qui est un optimum de Pareto

Le cas d'un participant qui est neutre au risque

Pour l'individu qui est neutre au risque, notons le j, on peut sans perte de généralité normaliser son utilité de façon à ce que $u'(c) = 1$. L'équation de l'optimum (4) s'écrit alors pour cet individu :

$$\lambda_j = \mu_\omega \quad \forall \omega \in \Omega,$$

ce qui implique l'égalité de tous les coefficients μ_ω (notons μ cette constante), et, partant, l'égalité des revenus dans tous les états de la nature pour les individus qui sont averses au risque :

$$\lambda_i u'(c^i_\omega) = \mu \quad \forall \omega \in \Omega, \forall i \in \{1, \ldots, I\}$$

Théorème Si l'un des participants du marché est neutre au risque, il supporte tout le risque, cad que sa distribution de revenu coïncide à une constante près à la distribution de revenu de l'ensemble de la population.

Théorème des fonds mutuel

Dans le schéma précédent, on notera par x^G le portefeuille dont la variance est la plus faible.

Proposition Dans le cas où il n'y a pas d'actif sans risque, Il existe un portefeuille, que l'on note x^A tel que tout portefeuille sur la frontière efficace est une combinaison de x^A et du portefeuille x^G.

En fait tout se passe comme si les agents, au moment de leur choix optimal, partageaient leur richesse entre deux fonds mutuels, x^A et x^G, dont l'un est de variance minimale.

3

Exemples

Economie d'échange

On considère une économie d'échanges comportant deux périodes $t=0,1$, un unique bien de consommation (périssable) dont Robinson (r) et Vendredi (v) sont les agents. Il existe trois états $s=1,2,3$ dont les probabilités sont $\pi_1=2/5$, $\pi_2=1/5$, $\pi_3=2/5$. Les états déterminent les dotations de Vendredi, celles de Robinson demeurant constantes :

dotations	0	1	2	3
Robinson	100	50	50	50
Vendredi	50	0	100	200

Les préférences des deux agents vérifient l'utilité espérée :

$$U_i=\mathbf{E}u_i, \quad u_u=\ln(c_0^i)+\ln(c_1^i)$$

Economie d'échange (part 1)

Partie 1 Pour réallouer leurs ressources, Vendredi et Robinson décident de vendre des actifs financiers 1 et 2 dont les revenus sont :

$$d_1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}, \; d_2 = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

On note q_1 et q_2 les prix de ces parts, d_1 et d_2 les revenus de chaque part : On suppose qu'il existe également un marché des fonds prêtables (=marché monétaire) sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt r.

1.1) Montrer que les prix

$$q_1 = 84.349, q_2 = 204.35, r = -.40722$$

et les portefeuilles

$$\begin{array}{rclrclrcl} z_1^r &=& 2.0998, & z_2^r &=& -.82843, & B^r &=& 0 \\ z_1^v &=& -2.0998, & z_2^v &=& .82843, & B^v &=& 0 \end{array}$$

définissent un équilibre z_1^i, z_2^i étant les quantités détenues des deux actifs 1 et 2, B^i étant le montant de numéraire prêté.

1.2) Montrer que cet équilibre n'est pas optimal au sens de Pareto.

Economie d'échange (part 2)

Partie 2 Plutôt que d'introduire les actifs mentionnés plus haut ainsi que le marché des fonds prêtables, les agents préfèrent inroduire des parts sur les dotations futures. On note q^r et $q-V$ les prix des parts sur les dotations futures de Robinson et Vendredi, d_R et d_v les revenus de chaque part :

$$d_r = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}, \; d_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

2.1) Montrer que l'équilibre (supposé unique) de cette économie est Pareto optimal.
2.2) Comparer les équilibres des deux questions. Expliquer pourquoi le second équilibre est optimal alors qu'il utiliser moins d'actifs financiers.

Un exercice avec de la production

Economie de production avec deux périodes $t = 0, 1$, un bien par période. Deux agents Robinson et Vendredi.
A la période 0, on peut transférer du bien en période 1 suivant la technologie : $q_1 = \theta\sqrt{k_0}$.
Vendredi et Robinson ont initialement à la période 0 les dotations suivantes : $\omega_r = 75$, $\omega_v = 25$, ils sont propriétaires à moitié de l'entreprise qui transfère du bien de période 0 à la période 1. Les préférences des deux sont identiques $u_i(c_0, c_1) = c_0(c_1)^{4/5}$. Il y a un taux d'intérêt r auquel firmes et individus peuvent prêter et emprunter à $t = 0$.
1) Calculer l'équilibre général pour $\theta = 5$
2) Donner la valeur boursière de la technologie à $t = 0$ pour $\theta = 5$.
3) Déterminer l'impact qualitatif d'une hausse du paramètre de productivité θ sur l'investissement.