6

le Rôle de l'Information

M1 - Arnold Chassagnon, Université de Tours, PSE - Automne 2012

Plan du cours

1. Probabilités subjectives
2. Arrivée symétrique de l'information
3. Information asymétrique

Introduction

Le Rôle de l'information

Jusqu'à présent, on a supposé que tous les investisseurs avaient la même croyances sur les distributions, et les mêmes informations sur les rendements des actifs risqués.
Dans ce contexte, l'existence du marché financier s'expliquait principalement pour des motifs de partage de risque, quand les investisseurs diffèrent par leur aversion par le risque et par leur dotation initiale.

Nous nous proposons d'étudier le cas où les investisseurs ne partageraient pas les mêmes croyances sur les distributions des risques, en particulier, parce qu'ils disposent d'informations différentes, ou du moins, parce qu'ils les traitent différemment.

Traitement de l'information et conséquence sur l'investissement

La présence d'agents mieux informés sur le marché ne signifie pas nécessairement qu'il y a des opportunités d'arbitrage. Cela parce que traiter l'information requière des talents particuliers et a des coûts pour les organismes financiers qui emploient les investisseurs.

Nous allons étudier comment les agents sur le marché traitent l'information qu'ils reçoivent et les conséquences sur leurs investissement à court terme. On examinera d'abord le cas d'une information gratuite, puis le cas de modèles où l'information est coûteuse.

1

Croyances subjectives

et opportunités d’arbitrage

Le modèle

Les investisseurs ont des croyances particulières sur la distribution des états de la nature $\pi^i = (\pi^i_\omega)$. Et en général, pour $i \neq i'$, $\pi^i \neq \pi^{i\prime}$.

- typiquement pour certains états de la nature $\pi^i_\omega = 0$ et $\pi^{i\prime}_\omega > 0$
- ou bien les croyances divergent de façon moins fondamentales : $\pi^i_\omega > 0$, $\pi^{i\prime}_\omega > 0$ et $\pi^i \neq \pi^{i\prime}$.

Arbitrage pour l'agent i

Définition l'investisseur i a une opportunité d'arbitrage, s'il peut acheter un portefeuille d'arbitrage (z^k) tel que pour tout état de la nature ω : $\sum_k a_k^{\omega} z^k \geq 0$ et tel que $\sum_k p_k z^k \leq 0$, l'une de ces inégalités état stricte avec une probabilité $\pi_{\omega}^{i} > 0$. Autrement dit, Il existe un état de la nature auxquels les autres investisseurs ne pensaient pas, dans lequel le gain est strictement positif, et pour l'investisseur concerné, les états de la nature dans lequel le portefeuille délivrait des revenus négatifs sont de probabilité nulle. Ce portefeuille d'arbitrage n'est pas un portefeuille d'arbitrage pour les autres investisseurs dès lors que les autres inégalités sont nulles.

Condition de non arbitrage Il n'y a pas de portefeuille d'arbitrage pour l'investisseur i, s'il existe un ensemble de prix *subjectif* des actifs Arrow Debreu élémentaires (q_{ω}^{i}) tels que $\forall \omega : \; q_{\omega}^{i} > 0, \forall k : \; p^k = \sum_{\omega} a_{\omega}^{k} q_{\omega}^{i}$

Equilibre sur marché financier avec des croyances différentes

Existe-t'il un équilibre sur le marché financier quand les agents ont des croyances différentes sur les probabilités des différents états de la nature ?
Formellement Il y a équilibre sur le marché financier quand il y a un système de prix pour les différents actifs tels que la demande globale pour ces actifs financiers à ce prix égale l'offre globale de ces actifs financiers.

Exemple : Soit le marché pour une action d'une firme et deux agents A et B sur ce marché qui ont des croyances différentes.
Si l'agent A croît (un peu) à l'accroissement du prix de l'action et que B croît (un peu) à la diminution du même prix de cette action, alors, il y aura naturellement un équilibre dans lequel l'agent A va acheter à l'agent B une certaine quantité de cette action.

L’exemple précédent, continué

Par contre si A est certain que l’action va augmenter alors que B est certain du contraire, alors il n’y a pas d’équilibre, car A veut acheter une quantité infinie de cet actif alors que B veut en vendre une quantité infinie.

Cet exemple nous suggère qu’il n’est pas nécessaire que les croyances des différents agents coïncident pour qu’il existe un équilibre ; mais par contre qu’ils ne peuvent pas avoir des croyances totalement opposées à savoir une probabilité nulle contre une probabilité positive.

L’expression formelle de ce type d’intuition n’est pas au programme. Sachez cependant qu’il existe des conditions suffisantes pour l’existence d’un équilibre.

2

Arrivée d’information

Dsitribution plus ou moins risquée

Si une information arrive, il est possible que la distribution correspondante soit plus ou moins risquée.

Définition On dit qu'une distribution p est plus risquée qu'une autre distribution q si tous les investisseurs préfèrent la distribution q à la distribution p. Autrement dit

$$\forall u(\cdot): \qquad \mathbf{E}_p(u(x)) \leq \mathbf{E}_q(u(x))$$

Remarque : Si p est plus risquée que q, alors la distribution p a une moyenne inférieure à la distribution q.

Signal et révision des croyances

Loi de Bayes Soit un investisseur qui désire acheter un actif qui procure des revenus $\tilde{e}$. La connaissance commune concernant la distribution des revenus $\tilde{e}$ est p.
Si l'on suppose qu'il existe un signal $\tilde{s}$ qui est *corrélé* avec $\tilde{e}$, la distribution de $\tilde{e}$ conditionnelle à l'observation de $\tilde{s} = s$ est égale à :

$$p(e|s) = \frac{p(e,s)}{p(s)}$$

Application à l'achat d'actif risqué

Soit un investisseur qui doit décider de la variable z. Supposons que sa fonction d'utilité est $u^i(e,z)$, concave en z, et que la décision dépende en partie de l'observation de s, signal corrélé avec la variable e. Alors, cet investisseur a le programme suivant :

$$V(s) \quad = \quad \max_z \ \mathbf{E}[u(\tilde{e},z)|\tilde{s}=s]$$

En particulier, dans le cas où il n'y a qu'un seul actif risqué $\tilde{a}$, et que z désigne la quantité d'actif risqué que l'investisseur CARA ($u(x) = -e^{-\rho x}$) doit acheter, le programme devient :

$$V(s) \quad = \quad \max_z \ \mathbf{E}[e^{-\rho z\tilde{a}}|\tilde{s}=s] = e^{-\rho z \mathbf{E}[\tilde{a}|s] + \frac{1}{2}\rho^2 z^2 var[\tilde{a}|s]}$$

La solution est alors

$$z = \frac{\mathbf{E}[\tilde{a}|s]}{\rho var[\tilde{a}|s]}$$

Statique comparative

Si l’on reprend l’exemple précédent :

- Plus la variance anticipée est grande, moins l’agent investit dans l’actif sans risque
- Plus l’espérance est grande, plus l’agent investit dans l’actif sans risque

En d’autres termes, on investit lorsque l’on reçoit un signal que la variance est faible. L’information modifie le comportement d’investissement des agents.

3

Information Symmétrique
No trade theorem

La problématique du no trade theorem

Comment évolue le partage du risque entre plusieurs agents après que ces derniers aient reçu un signal public ?

Par exemple, si le signal donne quelques information partielles sur l'état de l'économie, par exemple le taux de chômage.

On suppose qu'à la date $t = 0$, tous les investisseurs ont les mêmes croyances $\pi_\omega(0)$ à propos des différents états de la nature ω et qu'ils échangent leur risques sur un marché complet.
A $t = 1$ les investisseurs observent la réalisation d'un signal public $\tilde{s}$ qui donne de l'information (partielle) sur l'état de la nature qui va être réalisé. A ce moment là, les agents ont l'opportunité de commencer à faire des échanges, sur la base de la révision de leurs croyances $\pi(\omega|s)$.
Remarquez que l'on suppose que la distribution à la date $t = 0$ est obtenue à travers de la distribution jointe à la date $t = 1$.

On montre que dans ce cas, il n'y a pas d'amélioration paretienne, et que dans le cas d'une économie concurrentielle, il n'y a pas d'échange entre les agents. C'est ce que l'on appelle le “No trade theorem”.

Intuition avant le modèle

En effet, bien qu'il réduise l'incertitude, le signal ne permet pas de réallouer les ressources en augmentant le bien-être de tous les agents.

Cela parce que l'on partait d'un marché complet.

Pour comprendre ce théorème, prenons l'exemple du marché de l'assurance automobile : alors qu'il y a bien un marché ex ante, avant toute résolution de l'incertitude concernant les accidents, une fois les accidents réalisés, il n'y a plus de marché possible. Les conducteurs malheureux conservent les dommages qu'ils subissent, sans plus pouvoir les partager avec aucune institution.
On parle encore de l'effet Hirshleifer, autrement dit qu'une résolution précoce de l'incertitude peut avoir un impact négatif sur le partage des risques.

Amélioration paretienne avec plus d'information ?

Proposition Soit une allocation (c_i^{ω}) des ressources entre I agents qui est optimale ex ante. Supposons que tous les agents reçoivent le même signal s qui permet une résolution partielle de l'incertitude. Alors il n'existe pas de réallocation du risque qui puisse améliorer le bien-être de tous les agents.

Preuve A faire dans le cas suivant, 2 états de la nature, 2 signaux possibles, 2 agents, par l'absurde

$time, state$	π_{ω}^{1}	π_{ω}^{2}	$p(s)$
$t=1, s=1$	$1/4$	$3/4$	$p(s=1)=1/2$
$t=1, s=2$	$3/4$	$1/4$	$p(s=2)=1/2$
$t=0 (s=0)$	$1/2$	$1/2$	

On note (c^A, c^B) l'allocation optimale des ressources à $s=0$, (x^A, x^B) l'allocation pareto améliorante qui existerait à la révélation de $s=1$.

No trade theorem

Théorème Supposons les marchés complets et à l'équilibre à $t = 0$. à $t = 1$, résolution partielle de l'incertitude : tous les agents observent le signal $s = 1$. Alors, il existe un équilibre *autarcique* à $t = 1$: les prix changent, mais pas les quantités.

Preuve Dans un marché complet, les équations, complémentaires de l'équation d'équilibre, qui caractérisent l'équilibre est l'ensemble des conditions premières des agents, qui définissent les prix des Arrow-Debreu, à savoir :

$$q_\omega = \lambda_i u'(c^i_\omega)\pi^0_\omega$$

Si, mécaniquement, on multiplie les membres de cette équation par $\frac{\pi^1_\omega}{\pi^0_\omega}$, on obtient

$$q_\omega \frac{\pi^1_\omega}{\pi^0_\omega} = \lambda_i u'(c^i_\omega)\pi^1_\omega$$

ce qui est l'équation caractéristique d'un équilibre à $t = 1, s = 1$ quand le prix d'équilibre des actifs Arrow-Debreu est $q_\omega\ \pi^1_\omega / \pi^0_\omega$.

4

Information asymétrique

Equilibre myope

Equilibre REE

Equilibre avec un signal coûteux.

Equilibre myope

Si on suppose maintenant que chaque investisseur i observe un signal s_i privé, bien que corrélé avec la distribution, la situation est bien différente, même si ces signaux sont corrélés entre eux.

En effet, après l'observation du signal, il y a en effet un équilibre où les agents rentrent dans une phase d'échange. En effet, si on revient sur la preuve du no-trade theorem, on voit que lorsque le signal s_i a été observé, l'investisseur i a une disposition marginale à payer telle que :

$$q_{i\omega}^{s_i} = q_\omega \frac{\pi_\omega^{s_i}}{\pi_\omega^0} = \lambda_i u'(c_\omega^i)\pi_\omega^{s_i}$$

Donc, si les agents ne modifiaient pas leur consommation, ils divergeraient sur le prix des actifs Arrow-Debreau

Equilibre myope (suite)

il est cependant à noter qu'un tel équilibre n'est pas très réaliste. En effet, on suppose que les agents n'utilisent que l'information privée qu'ils reçoivent, le s_i.

On a négligé le fait qu'ils pourraient utiliser l'évolution des prix comme signaux publics, qui leur permet de d'inférer quelle est l'information privée qui a été reçue par les autres agents.

Equilibre REE

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'information reçue par les agents est exogène et qu'ils n'utilisent pas l'information qui est *contenue* dans les prix de marché.

Nous étudions maintenant l'évolution de l'équilibre quand les agents essayent d'inférer de l'évolution des prix la valeur des signaux des autres agents dans l'économie. C'est ce que l'on désigne sous le nom d'équilibre “Rational expectations equilibrium”.

Définition Un équilibre REE est la donnée d'un système de prix contingents aux signaux, $p(s) = p(s_1, \ldots, s_J)$, tel que pour tout s, $p(s)$ est un système de prix d'équilibre tels que les agents prennent en compte leur signal privé ainsi que l'information contenue dans les prix, à savoir

- la demande optimale $z^i(p, s)$ de l'agent i maximise $\mathbf{E}[u_i(c_i^\omega)|p = p(s), \tilde{s}_i = s_i]$ sous sa contrainte de budget
- Pour tout ω, $\sum_i c_\omega^i$ égale la dotation initiale de l'état ω.

Equilibre REE

une des questions centrales concernant l'équilibre REE est de savoir si les prix révèlent entièrement les signaux qui ont été reçus par les différents agents ou non.

On dit que les prix sont pleinement révélateurs si l'observation de p permet de retrouver toute l'information pertinente sur la distribution des prix d'actifs, cad permet de caractériser la distribution de ω étant donné s.
Mais on est alors dans le cas du No-trade theorem : si les prix sont pleinement révélateurs, le no trade theorem s'applique.Tous les agents ont les mêmes croyances sur l'évolution de la distribution des états de la nature et choisissent de ne pas faire d'échange.

En particulier, on montre que quand les marchés sont complets, les prix sont pleinement révélateurs.

Equilibre avec des signaux coûteux

Dans le modèle de Grossman and Stiglitz (1980), les investisseurs choisissent de payer pour recevoir un signal ou de demeurer non informés.
Ces auteurs montre qu'il y a un équilibre où une fraction des investissurs choisit de s'informer.