

# ECONOMIE ET SANTE

## SANTE, INCERTAIN, INCERTITUDE

Risque : modèle d'espérance d'utilité et QALYS

Incertitude: max min et variations

# Plan

- 1 Risque & Espérance d'utilité**
- 2 Les QALYS - différentes mesures du bien-être**
- 3 Incertitude traitée de manière scientifique : le maximin**

1

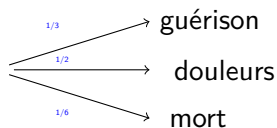
**Représentation objective et subjective du risque en santé**

## Incertain : Etats de santé, voire probabilités

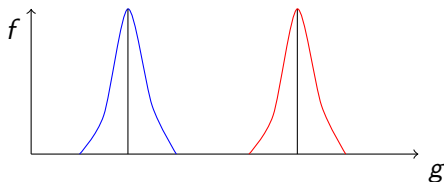
L'incertain concerne ce que sera l'état de santé futur. Un choix médical peut par exemple conduire à différents états de santé futurs possibles,  $s_j \in \mathcal{S}$ .

La recherche aidant, ces états peuvent être associés à une probabilité  $p_i$  : Il s'agit alors d'une **distribution** des risques santé qui satisfait la contrainte  $\sum_i p_i = 1$  (ou  $\int f(x)dx = 1$ )

Les distributions sont parfois discrètes, comme dans l'efficacité d'un traitement :



elles sont souvent continues, comme dans la distribution des globules blancs chez les patients sains ou malades :



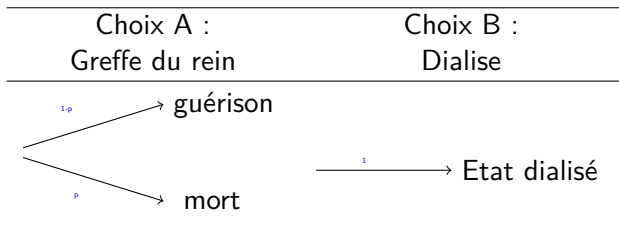
## Incertain et Incertitude : probabilités, ou non

**Risky choice** (ou incertain) : « each action leads to one of a set of possible specific outcomes, each outcome occurring with a known probability. The probabilities are assumed to be known to the decision maker » Luce and Raiffa, Games and Decision, 1957, p13

**Uncertain choice** (ou incertitude) : « each action has as its consequences a set of possible specific outcomes, but the probability of these outcomes are completely unknown or are not even meaningful » Luce et al.

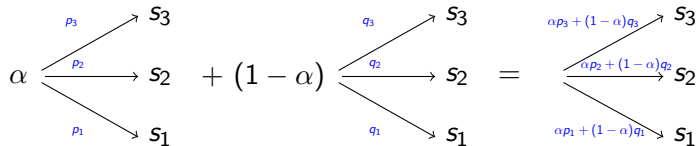
# Représenter un problème de décision dans l'incertain

Si l'on a le choix entre deux stratégies médicales, chacune représentée par une distribution, laquelle devrait-on choisir ?



## Variété des choix possibles ; Mixage des loteries

L'ensemble des choix est souvent élémentaire. Il peut être enrichi en formant des loteries nouvelles à partir de loteries existantes.



Le *mixage* est une opération qui en santé pourrait correspondre au fait que deux groupes de patients sont soumis à deux stratégies thérapeutiques différentes.

# Le modèle d'Espérance d'utilité

L'ensemble des états de santé est  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . On suppose que le décideur a des préférences  $\succeq$  sur les distributions de santé. qui vérifient les axiomes suivant :

1. pré-ordre partiel,
2. continuité,
3. indépendance :  $\forall x, y, z, x \succeq y$  ssi  $\alpha x + (1 - \alpha)z \succeq \alpha y + (1 - \alpha)z$
4. Non trivialité : il existe au moins  $x, y$  tels que  $x \succ y$

**Théorème (de Von Neuman Morgerstern) :** la relation de préférence  $\succeq$  vérifie les 4 axiomes précédents si et seulement si il existe une fonction d'utilité des états de santé  $u(\cdot)$  telle que :

$$x \succeq y \iff \sum_s p_s u(x_s) \geq \sum_s p_s u(y_s)$$

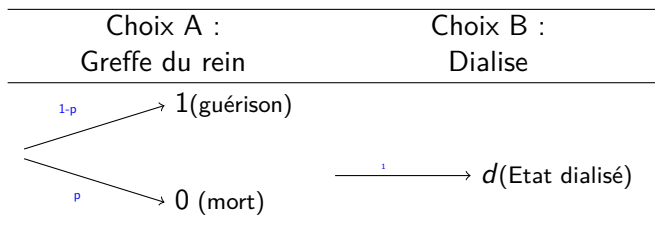
*(La fonction  $u(\cdot)$  est unique à une relation affine près)*



## Décision dans un cas de décision thérapeutique

L'application du théorème VNM indique que le choix entre deux stratégies médicales peut se représenter comme le choix entre deux distributions d'utilités (QALY), dont on évalue l'espérance.

Il est fréquent dans la littérature médicale de normaliser le bon état de santé à 1, et le décès à 0 :



Ainsi, dans ce modèle, le choix d'opérer correspond à :  $1 - p \geq d$ ,  
soit  $p \leq 1 - d$ .

## EU : Interprétation pour les distributions monétaires

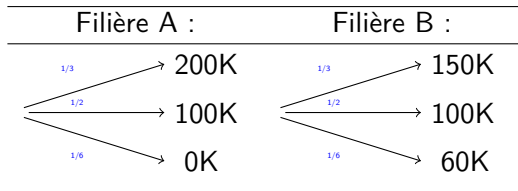
Le théorème de VNM s'applique aussi aux distributions monétaires, il souligne le rôle de l'utilité dans la décision : Plutôt que de considérer l'espérance d'une distribution, tout se passe comme si l'agent appréciait ses différents revenus possibles à travers un filtre, l'utilité ressentie  $u(x)$  avant de calculer l'espérance de ces utilités.

$$U \left( \begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array} \right) = \frac{1}{3} u(x) + \frac{1}{2} u(y) + \frac{1}{6} u(z)$$

**Remarque** : La seule statistique utilisée est la moyenne. On n'a pas recours aux autres statistiques qui aident à appréhender les distributions monétaires : variance, min, max, médiane, [...]

## un exemple

Lorsque les distributions concernent une richesse future, on a une compréhension plus immédiate de certains mécanismes de choix. Imaginons que lorsque vous avez commencé vos études, vous aviez le choix entre deux filières qui différaient en particulier sur le profil de revenus annuels futurs en début de carrière :



Vous préférerez la filière  $B$  (qui conduit à un revenu moins dispersé) si  $u(200K) - u(80K)$  n'est pas tellement plus élevée que  $u(150k) - u(130K)$ .

C'est en particulier le cas si la fonction  $u(\cdot)$  est très concave. [On le vérifie ici avec  $u(x) = \sqrt{x}$  - Alors que  $E[A] > 116$  et  $E[B] = 110$ .

## EU : les QALYS pour les états de santé

L'espérance d'utilité n'est donc pas un bricolage qui tend à introduire des nombres à la place d'un état de santé, mais elle part du résultat selon lequel si un patient a des préférences, alors ces dernières s'expriment comme une espérance d'utilité : cela suppose

- de connaître la probabilité des différents états
- d'évaluer la QALY d'un état de santé.

La littérature sur les QALY est assez abondante depuis les années 80.<sup>1</sup> Des tables de QALY classifiant différents états de santé ont été publiées. On doit néanmoins souligner que ce distingue les préférences, les choix, d'un individu à l'autre est justement ces valeur des QALY, par essence, personnelles.

---

1. *The Qaly Toolkit*, par Claire GUDEx et Paul KIND, University of York, 1990.

## A la recherche de probabilités - cas de Finetti

### Comment représenter les préférences sans probabilités ?

L'ensemble des états de la nature est  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ , et les alternatives (les actes) sont des fonctions sur  $S : X = \mathbb{R}^S$ . On suppose que le décideur a des préférences  $\succeq$  sur ces actes. qui vérifient les axiomes suivant :

1. pré-ordre partiel,
2. continuité,
3. additivité :  $x \succeq y$  ssi  $x + z \succeq y + z$
4. Monotonie :  $x \geq y$  entraîne  $x \succeq y$
5. Non trivialité : il existe au moins  $x, y$  tels que  $x \succ y$

**Théorème (de Finetti)** : la relation de préférence  $\succeq$  vérifie les cinq axiomes précédents si et seulement si il existe un vecteur de probabilité (*unique*) tel que

$$x \succeq y \iff p \cdot x \geq p \cdot y$$

# A la recherche de probabilités - cas d'Anscombe et Aumann

Le modèle d'Anscombe et Aumann part des états de la nature et dérive des probabilités subjectives comme le fait le modèle de de Finetti. Cependant, dans ce modèle, on ne fait pas l'hypothèse que les conséquences sont des revenus ; les outcomes sont des loteries.

Ainsi, il y a deux niveaux d'incertitude :

1. premièrement, on ne sait pas quel est l'état du monde qui sera réalisé et on a pas de probabilité qui mesure cette incertitude.
2. Deuxièmement, étant donné la réalisation d'un état de la nature, le décideur fait face à une loterie dont les probabilités sont objectives, comme dans le modèle de Von Neumann Morgenstern.

Il y a par cette représentation une séparation de l'ensemble des états du monde et de l'ensemble des conséquences, ce qui permet de considérer vraiment l'action, le choix libre.

## Loteries et actes, mixtures

On doit pour développer la théorie de Anscombe et Aumann donner un peu plus de structure sur l'espace des loteries  $\mathcal{L}$  et sur l'espace des actes,  $\mathcal{L}^S$ .

Soient deux distributions finies  $P(\cdot)$  et  $Q(\cdot)$ . Le mélange des deux loteries  $\alpha P + (1 - \alpha)Q$  est défini par :

$$\forall x(\alpha P + (1 - \alpha)Q)(x) = \alpha P(x) + (1 - \alpha)Q(x)$$

On définit aussi une mixture entre deux actes : Soient deux actes  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$ . Le mélange des deux actes  $\alpha f + (1 - \alpha)g$  est défini par :

$$\forall s(\alpha f + (1 - \alpha)g)(s) = \alpha f(s) + (1 - \alpha)g(s)$$

# Esperance d'utilité

Ainsi, si vous choisissez  $f \in \mathcal{L}^S$  et que la nature choisit  $s \in S$ , et si que vous avez une fonction VNM  $u(\cdot)$ , vous ferez face à une loterie dont l'espérance d'utilité sera

$$\sum_x f(s)(x)u(x)$$



# Théorème d'Anscombe Aumann

On suppose que le décideur a des préférences  $\succeq$  sur ces actes. qui vérifient les axiomes suivant :

1. pré-ordre partiel,
2. continuité,
3. Indépendance :  $f \succeq g$  implique  $\alpha f + (1 - \alpha)h \succeq \alpha g + (1 - \alpha)h$
4. Monotonie :  $f(s) \geq g(s)$  entraîne  $f \succeq g$
5. Non trivialité : il existe au moins  $f, g$  tels que  $f \succ g$

**Théorème (Anscombe Aumann)** : la relation de préférence  $\succeq$  vérifie les cinq axiomes précédents si et seulement si il existe une mesure de probabilité sur  $S$  et une fonction VNM  $u(\cdot)$  (*unique à une transformation affine près*) telle que

$$f \succeq g \iff \sum_x f(s)(x)u(x) \geq \sum_x g(s)(x)u(x)$$

## SEU : les QALYS et les croyances subjectives

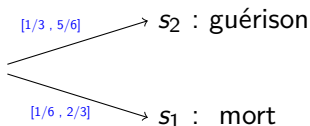
Cette théorie de l'espérance d'utilité subjective n'est pas non plus un bricolage, mais elle impose

- d'entre des *croyances* sur l'occurrence des différents états de la nature
- d'évaluer la QALY d'un état de santé.

# Ambiguïté de l'information

Une piste plus récente est de considérer non pas que l'on a pas d'information (sur les probabilités des états), mais qu'on a une information ambiguë, dans le sens d'une *information qui est comprise de manière pauvre*<sup>2</sup>.

Plus concrètement, on connaît des distributions de manière imprécise, dans le sens où la vraie distribution se trouve dans un sous-ensemble de distributions.



---

2. Massimo Guidolin et Francesca Rinaldi, *Ambiguity in Asset Pricing and Portfolio Choice : a review of the litterature*, 2010.

# MAXIMIN en cas d'ambiguïté de l'information

On montre de manière axiomatique, que les préférences avec une information ambiguë se représentent comme un **maximin**, les états de la nature étant représentés par des QALYS

$$U \left( \begin{array}{l} \begin{array}{l} \xrightarrow{[1/3, 5/6]} s_2 \\ \xrightarrow{[1/6, 2/3]} s_1 \end{array} \end{array} \right) = \min_{p_2 \in [1/3, 2/3]} (1 - p_2)u(s_1) + p_2u(s_2)$$

C'est à dire que l'on évalue une situation ambiguë par la moindre valeur que pourrait prendre son espérance d'utilité pour les différentes probabilités possibles.

Exemple : si  $s_1 = 0$  et  $s_2 = 1$  :  $U = 1/3$  : le maximin a évalué cette EU à partir de la distribution la plus défavorable au patient : une probabilité de décès de  $2/3$ .

# Principe de précaution

En cas d'ambiguïté dans l'information : utiliser un maximin  
(l'interprétation est : comme si la nature jouait systématiquement contre nous)



# Théorie des signaux de détection - un exemple médical

Quand l'information sur les conséquences d'un choix thérapeutiques sont mal connues, on peut toujours avoir recours à des tests, qui permettent d'améliorer l'information.

**Exemple** Patients may be infected by a virus : not lethal but costs 10 000 Euros to cure. A prevention treatment (vaccine) exists : cost 1 000 Euros.

Il existe une croyance a priori sur la présence des virus dans la population : 5%. Ceci permet de calculer le coût moyen de ne pas traiter, comparé au coût du vaccin. [neutralité au risque] : ici, ne pas vacciner.

Un test est possible afin d'améliorer la connaissance de la pathologie du patient dont les probas ( $a + b + c + d = 1$ ) sont les suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{Virus, +} & a & \text{Virus, -} & b \\ \text{Sain, +} & c & \text{Sain, -} & d \end{array}$$

La sensibilité du test :  $\frac{a}{a+c}$  (axe vertical : diagramme de ROC)

La spécificité du test :  $\frac{d}{b+d}$  (axe horizontal : diagramme de ROC)

On peut alors calculer le coût moyen de la maladie, étant donné le test choisi et de choisir le meilleur test possibles

## En conclusion, steps toward a decision

Étant donné un ensemble d'états de santé possibles et un ensemble de choix ou d'actions, que faire ?

- Form beliefs about the state of nature (Elire des croyances à propos des états de santé).
  - ▶ Perception as a Bayesian inference (Knill & Richards, 1996)
- Evaluate consequences of actions
  - ▶ Does the brain calculate value? (Vlaev et al., 2011)
- Select the action that reaches the goal
  - ▶ Decision tools : decision theory, signal detection theory.