Economie de l'Incertain et des Incitations

CHAPITRE 2

Eléments de théorie des jeux en information symétrique et asymétrique

Equilibres Bayesiens

Université de Tours - M1 AGE - Arnold Chassagnon - Automne 2017

Incertain et coordination

Une des sources essentielles de l'incertain en économie provient des *problèmes de coordination*. Typiquement, lorsque l'issue d'une situation dépend de la décision de plusieurs personnes (ou ce qui revient au même du choix de comportement de plusieurs personnes), elle peut être perçue comme incertaine.

L'économie a une approche tout à fait originale en exploitant le plus possible cette idée selon laquelle chacune de ces personnes est un agent économique qui émet des jugements et prend des décisions réfléchies, stables dans le temps, et prend systématiquement de la hauteur tout en se projetant dans l'avenir.

Très naturellement, il s'agira de comprendre si l'on peut analyser, comprendre et donc anticiper la coordination entre ces agents. C'est en particulier l'objet de la théorie des jeux.

Coordination et Jeu

Le mot JEU mérite d'être expliqué. Il est toujours accompagné de deux hypothèses que nous supposerons toujours vérifiées dans la suite :

1. Les agents sont plongés dans une situation dans laquelle son bien-être est affecté non seulement par les décisions qu'il prend, mais aussi par la décision des autres agents ;
2. On suppose maximum le degré de rationalité de l'individu lorsqu'il est confronté à d'autres agents, et que cette agent peut former et utiliser des anticipations sur les comportements de ces autres agents (ce que l'on appelle comportement stratégique).

La théorie des jeux étudie à la fois cette coordination des anticipations des agents parallèlement à la coordination de leurs actions.

Jeu, Information et incertitude

L'information dont disposent les agents dans un jeu est un élément très important pour comprendre le contexte dans lequel se fait la coordination. On définira précisément dans ce chapitres deux contextes, celui d'information symétrique, et celui d'information asymétrique.

Typiquement, si les agents n'ont pas exactement les mêmes éléments d'appréciation de la situation dans laquelle ils sont engagés, on peut penser que cela augmente l'incertitude (et plus généralement leur exposition au risque).

Une des questions majeures de ce chapitre est de comprendre (dans des contextes simples) comment le fait que les agents partagent ou non la même vision du jeu dans lequel ils sont engagés affecte la coordination et l'incertitude que les agents peuvent avoir sur l'issue du jeu.

Plan

Le cadre de la théorie des jeux

Un jeu est une représentation formelle d'une situation dans laquelle un certain nombre d'individus rationnels doivent prendre des décisions qui les affectent mutuellement. Ces individus sont soumis à une interdépendance stratégique, c'est-à-dire que le sort de chaque joueur ne dépend pas seulement de ses propres actions, mais également des actions des autres joueurs. Dés lors, les actions que choisit un individu dépendent de ses anticipations sur les actions des autres.

Un jeu est décrit par

- la liste des joueurs
- les régles du jeu, cad les actions et les interactions
- les résultats du jeu dans les différentes situations

Exemple

Jeu de la Corde (VAYDAY) ou des gladiateurs

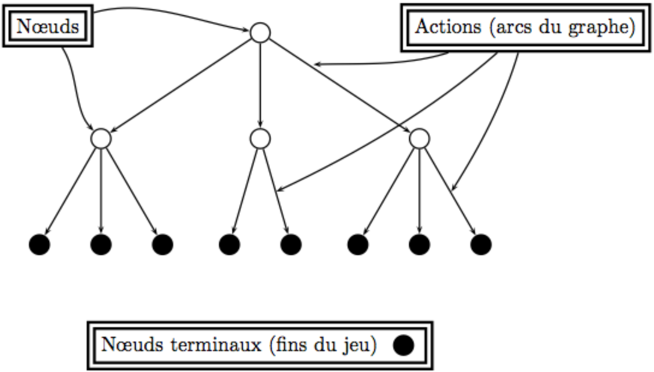
Deux joueurs, de caractéristique identique, postés de chaque côté d'une corde doivent choisir le niveau d'effort qu'ils doivent fournir pour l'emporter. L'effort, e, est compris entre 0 et 1 ($e \in [0, 1]$). On notera e_a et e_b les efforts respectifs fournis par les deux joeurs Leur paiments sont les suivants :

- S'ils gagnent : $1 - e$
- Si ex eaquo : $\max(\frac{1}{2} - e, 0)$
- S'ils perdent : 0

Trouver l'équilibre UNIQUE de ce jeu. Interpréter, en considérant le cas où 0 signifie la mort.

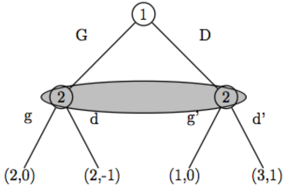
jeux sous forme extensive

Un jeu est sous forme extensive quand il est représenté comme un arbre. Chaque action est représentée par une branche. Chaque branche est issue d'un noeud géré par un (et un seul) joueur. Un arbre commence en un noeud appellé noeud initial et se caractérise par la propriété suivente : tout noeud est relié au noeud initial par un seul chemin formé de branches et de noeuds. Des utilités sont associées à chaque noeud terminal de l'arbre.



information dans les jeux sous forme extensive

Un jeu est dit à information parfaite si au moment de jouer, tous les joueurs sont informés de l'action qui a été choisie précédemment par leur rival.



Le concept d'ensemble d'information permet de formaliser l'information imparfaite. Formellement, un ensemble d'information est un sous-ensemble des noeuds de décision d'un joueur. Les ensembles d'information d'un joueur forment une partition des noeuds gérés par ce joueur. L'interprétation est qu'un joueur ne peut distinguer les noeuds déun même ensemble d'information. Les actions disponibles en chaque noeud d'un même ensemble d'information sont donc identiques.

jeu sous forme normale (sous forme stratégique)

Un concept central de la théorie des jeux est celui de stratégie d'un joueur. Une stratégie est un plan contingent complet, une régle de décision qui spécifie le choix du joueur dans toutes les circonstances dans lesquelles il pourrait avoir à choisir une action. En d'autres termes, la stratégie d'un joueur est une planification du choix de ses actions à chacun de ses ensembles d'information. Spécifier une stratégie, c'est comme écrire un livre d'instructions avant de jouer, qui permette de déléguer ses choix. Un représentant pourrait agir au nom d'un joueur, en toutes circonstances, en consultant le livre.

Exemple

Dilemne du prisonnier

Deux hommes sont arrêtés dans une situation louche, et la police veut les faire avouer. S'ils *avouent* tous les deux, ils vont en prison pendant une année, s'ils *nient* en bloc, ils sont relâchés. Si l'un des deux avoue seulement, il est relâché, avec une prime, et l'autre est emprisonné pendant dix années. On représente ce jeu en décrivant les bénéfices dans ces quatre situations :

	A	N
a	-1,-1	+1,-10
n	-10,+1	0,0

Trouver les stratégies d'équilibres de ces deux hommes, s'ils sont interrogés dans des pièces différentes, sans pouvoir communiquer, tout en connaissant les régles du jeu.

Quelques équilibre de Nash

Calculer les équilibres de Nash du jeu lorsque les espaces de stratégies pour les deux joueurs sont $S_1 = S_2 = [0, 1]$ avec les fonctions de payoff suivantes :

a) ▶
$$g_1(x, y) = 5xy - x^2 - y^2 + 2$$
$$g_2(x, y) = 5xy - 3x^2 - 3y^2 + 5$$

b) ▶
$$g_1(x, y) = 5xy - x - y + 2$$
$$g_2(x, y) = 5xy - 3x - 3y + 5$$

c) ▶
$$g_1(x, y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$$
$$g_2(x, y) = (x + y - 1)^2$$

d) ▶
$$g_1(x, y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$$
$$g_2(x, y) = (x - y)^2$$

2

Elimination des stratégies fortement dominées

On dit qu'une stratégie d'un joueur est fortement dominée, s'il existe une autre stratégie qui lui donne un plus grand payoff, quels que soient les actions des autres joueurs

Si un ensemble de stratégie résulte de l'élimination des stratégies dominées de tous les joueurs c'est un équilibre de Nash :

- cf. le dilemne du prisonnier

Remarquons que l'élimination itérative des stratégies strictement dominées repose sur l'hypothése de connaissance commune des utilités et de la rationalité des joueurs. L'élimination des stratégies strictement dominées nécessite seulement que chaque joueur soit rationnel, alors que l'élimination itérative des stratégies strictement dominées que nous venons d'effectuer nécessite non seulement que le joueur 2 soit rationnel, mais également que le joueur 1 sache que le joueur 2 est rationnel.

Non existence ou multiplicité

Pierre, ciseaux, feuille

Ciseaux coupent feuille, qui emballe pierre, qui casse ciseaux

	P	C	F
p	0,0	-1,1	+1,-1
c	-1,+1	0,0	+1,-1
f	+1,-1	-1,+1	0,0

Pas d'équilibre

Bataille des sexes

Mari et femme doivent se retrouver au spectacle, mais ils ne savent pas si c'est au Théâtre ou à la Boxe, et ils ne peuvent communiquer :

	T	B
t	3,2	1,1
b	1,1	2,3

Deux équilibres.

Existence d'un équilibre de Nash

L'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu est liée à l'existence d'un point fixe dans la correspondance de meilleure réponse. Les théorémes de points fixes permettent ainsi de caractériser les situations dans lesquelles un équilibre existe. Le résultat le plus communément utilisé est le suivant :

Theorem

1. *Dans un jeu fini, il existe toujours un équilibre de Nash, au moins en stratégie mixte*
2. *sinon, dans le cas général il existe un équilibre de Nash*
    - *Si les ensemble de stratégies sont des convexes, compacts,*
    - *Si les fonctions de paiement sont quasi-concaves et continues,*

Equilibre de Nash en stratégie mixte

Un joueur de football qui tirerait les pénaltys toujours du même côté, un joueur de tennis qui servirait toujours du même côté, ne se comporteraient pas de façon très intelligente car leurs adversaires anticiperaient leurs actions et pourraient les contrecarrer facilement. Dans de telles situations, il est essentiel de se comporter comme si le hasard déterminait l'action.

Une stratégie mixte est une distribution de probabilités sur des stratégies pures (i.e., pour le joueur i, sur S_i). Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est donc une stratégie mixte correspondant à une distribution de probabilités dégénérée, i.e., qui donne une probabilité 1 à s_i et 0 à toute autre stratégie.

jeu du penalty, entre le goal (1) et le buteur (2)

	$p(G) = \beta$	$p(D) = 1 - \beta$
$p(g) = \alpha$	1,-1	-1,1
$p(d) = 1 - \alpha$	-1,1	1,-1

- Trouver les stratégies mixtes qui forment un équilibre de Nash. $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ conviennent-ils ?

Transformer une histoire en un jeu

Soit l'histoire suivante :

- Un piéton qui ne traverse pas au passage clouté dans un pays où les automobilistes ont un comportement peu civilisé résout un problème élémentaire en théorie des jeux, dans la mesure où il anticipe correctement le comportement vraisemblable des autres. Réciproquement, il en va de même pour l'automobiliste peu courtois qui s'attend à ce qu'un piéton ne traverse pas lorsque sa voiture approche d'un passage clouté, étant donné la mauvaise réputation des automobilistes dans le pays. En définitive, chacun d'entre nous est quotidiennement impliqué dans des situations relevant de la théorie des jeux.

- Décrire un jeu et l'équilibre (en stratégie mixte) correspondant qui décrit cette situation entre le piéton et l'automobiliste, en appellant p la probabilité que le piéton traverse le passage clouté à l'approche du voiture et q la probabilité que la voiture ne s'arrête pas au passage clouté. Les payoffs (piéton, voiture) sont les suivants : si le piéton traverse et que la voiture passe (-1, α) ; si le piéton traverse et que la voiture ne passe pas (1,0) ; si le piéton ne traverse pas et que la voiture passe (0,1) ; si le piéton ne traverse pas et que la voiture ne passe pas (0, 0).

3

Le paradigme de l'information complète

Les jeux que nous avons étudié dans le chapitre précédent étudient la coordination des stratégies des joueurs, tout en supposant que ces joueurs disposent d'une même information.

L'information joue un rôle clé, puisqu'elle permet à chaque joueur de déterminer son action, en toute connaissance des motifs des actions des autres joueurs.

L'information complète est une hypothèse forte. Par exemple, il est peu probable qu'une entreprise connaisse la fonction de coût de ses concurrents. Une firme qui négocie avec un syndicat ne connaît pas la désutilité des membres du syndicat pour une grève longue.

Information incomplète et croyances

Cependant, cette hypothèse de connaissance des motivations des autres joueurs est relativement forte. Les économistes étudient ce qui se passe quand on doit relaxer cette hypothèse, et étudient deux directions :

- la diffusion de l'information lorsque les différents joueurs vont (nécessairement) dévoiler leur action
- la formation et le rôle des croyances des différents joueurs, croyances qui viennent remplacer d'une certaine manière le défaut d'information de ces joueurs.

En fait, on suppose toujours que le défaut d'information n'est pas total, mais qu'il repose toujours sur un savoir *objectif* le plus souvent sous la forme d'une distribution de probabilités. Typiquement, au cours du jeu, les joueurs acquièrent de l'information et dans cette dynamique d'acquisition de l'information, la distribution des joueurs se précise

Croyances et révision bayesienne

On appelle révision bayesienne ce processus par lequel un agent incertain incorpore l'information qu'il reçoit et modifie ses croyances, cad la distribution du/des paramètres inconnus.

Que les croyances soient déterminantes dans la prise de décision en situation d'incertitude est une idée ancienne en économie mais abordée de manière différente. Pendant longtemps, l'économie a procédé en partant de l'idée du choix rationnel pour en déduire la forme et les propriétés des croyances.

Plus récemment, l'économie s'est engagée notamment sous l'impulsion de Charles Manski dans l'étude empirique des croyances et leur rôle dans les décisions économiques.

Les jeux en information incomplète

Jusqu'à présent, nous avons examiné des jeux simples, avec une structure contenant beaucoup d'information et relativement peu d'incertitude sur le type des joueurs ou sur la forme extensive du jeu.

On dit que le jeu est à *information complète* lorsque tous les joueurs en connaissent les régles, c-a-d les actions dont disposent chaque joueur, l'information dont dispose le joueur à chaque période ainsi que l'intervention éventuelle du hasard.
il est sinon à information incomplète et les croyances jouent leur rôle là où l'information est manquante.

- dans un jeu sous forme normale, un joueur pourrait ne connaître qu'imparfaitement les payoffs des autres joueurs ▶ c-a-d leur *type*
- dans le cas d'intervention de la nature (du hasard), les effet d'une stratégie pourrait-être risqués ▶ et calculés via les *croyances* du joueur.

Structure d'un jeu Bayesien

Dans un jeu bayésien, la nature joue en premier. Elle choisit la caractérisitique ou le type de chaque joueur. Chaque joueur est informé de son propre type mais non des types des autres joueurs. On note t_i le type du joueur i, $t_i \in T_i$ où T_i est l'ensemble des types possibles. Il est connaissance commune que les types sont tirés suivant une distribution de probabilités $p(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$. On note S_i l'ensemble des choix disponibles pour le joueur i, quel que soit son type. La fonction d'utilité u_i du joueur i dépend donc non seulement des actions choisies par les autres joueurs, mais aussi de leurs caractéritisques. Elle est définie sur l'ensemble

$$\underbrace{S_1 \times \dots S_n}_{actions} \times \underbrace{T_1 \times \cdots \times T_n}_{types}.$$

4

Equilibre bayésien

Definition
Un équilibre bayésien est un profil de stratégies contingentes aux types, tel que chaque joueur maximise son utilité attendue contingente à son type en prenant les stratégies contingentes des autres joueurs comme données. La stratégie optimale $s_i(t_i)$ maximise

$$\sum_{t_{-i}} p_i(t_i|t_i)u_i(s_1^*(t_1),\ldots,s_i,\ldots,s_n^*(t_n))$$

- il est **nécessaire** que i connaisse le choix rationnel de TOUS les types
- Dans cette analyse, l'agent i calcule $s_i^*(t_i^*)$
- et il est capable, cet agent i, de calcule $s_i^*(t_i)$ même pour $t_i \neq t_i^*$
- Les *croyances communes* rendent **possible** ce même calcul par tous
- Chacun a donc "ses types", un type "moyen",
- MAIS bien sûr connaît son vrai type.
- et l'équilibre est $(s_1^*(t_1),\ldots,s_i^*(t_i^*),\ldots,s_n^*(t_n))$

Exemple d'un jeu bayesien

Une femme et un mari peuvent aller au théatre et/ou au cinéma.

- Le payoff de la femme dépend du choix du spectacle et aussi d'être ou non avec son mari. Elle préfére théatre au cinéma et deteste y aller seule :

	Mari au théatre	Mari au ciné
Femme au théatre	2	0
Femme au ciné	0	1

- Le payoff du mari dépend aussi du genre de spectacle et d'être ou non avec sa femme. Mais, on début de l'histoire, *on ne connaît pas son type*. S'il est **A***social*, il préférera avant tout aller seul au spectacle. S'il est **B***onhomme*, il deteste aller seul au spectacle, à l'identique de sa femme.

mari Asocial	AT	AC
FT	0	2
FC	1	0

Bon mari	BT	BC
FT	1	0
FC	0	2

- Nombre d'équilibre de ce jeu quand la femme sait que son mari est asocial
- Nombre d'équilibre de ce jeu quand la femme sait que son mari est bonhomme

■ On suppose la femme ignorante du type de son mari (sic). Pas tout à fait ignorante. Elle a des croyance : elle sait qu'il est social avec proba $\frac{1}{2}$ et casanier avec proba $\frac{1}{2}$

- Quel est l'équilibre quand la femme *connaît imparfaitement* le type de son mari ?

Analyse du jeu bayesien

Il s'agit tout d'abord de comprendre la rationalité dans ce jeu et plus particuliérement l'analyse des anticipations. En Nash normal, quand la femme agit, c'est optimalement, à partir de ce qu'elle anticipe de “ce que fait l'autre”.

- La difficulté ici est que l'autre ou du moins l'action adverse est mal identifié.
- Ceci dit, il n'est pas interdit de se dire : si l'autre était de tel type, il prendrait l'action optimale de son type, s'il était d'un autre type, il prendrait une autre action correspondante à son autre type.
  - Ainsi le payoff de FT est *l'espérance de ses payoffs*, en fonction de son anticipation sur l'action que prendrait chacun des autres types (2X2 possibilités)
  - et le payoff de chaque type de mari dépend de l'action anticipée de la femme

	AT BT	AC BT	AT BC	AC BC
FT	2 0 1	1 2 1	1 0 0	0 2 0
FC	0 1 0	$\frac{1}{2}$ 0 0	$\frac{1}{2}$ 1 1 ;	1 0 1

- On élimine 4 cases dans lesquelles ne veut pas aller femme
- puis on élimine 4 cases dans lesquelles ne veut pas aller le type Asocial
- puis on élimine 4 cases dans lesquelles ne veut pas aller le type Bonhomme
  - *l'équilibre de Nash bayésien en stratégie pure est* $(FC, AC, BT,)$ *: la femme va au théatre, le mari asocial au cinéma, le mari bonhomme au théatre.*

Exemple de jeu bayesien

1) Trouver l'équilibre de Nash quand deux joueurs 1,2 choisissent simultanément une action, 1, dans $\{a, n\}$, 2, dans $\{A_\alpha, N_\alpha\}$ et leurs paiements :

	A_α	N_α
a	-5,-5	-1,-10
n	-10,+1	0,-2

2) Trouver l'équilibre de Nash quand les régles du jeu précédent sont modifiées : les paiement du second joueur différent s'il joue A_β :

	A_β	N_β
a	-5,-11	-1,-10
n	-10,-7	0,-2

3) Considérer la situation dans laquelle le joueur 1 est incertain sur le jeu qui est joué : jeu α avec probabilité $1/2$ et jeu β avec probabilité $1/2$. On représente cette situation en disant que le joueur 1 est incertain sur le type du joueur 2 avec lequel il joue (qui peut être de type α ou β). Représenter les stratégies et les paiement du jeu bayesien par un tableau de 2 lignes et 4 colonnes. Trouver l'équilibre bayesien de ce jeu.

4) L'agent 1 aurait-il intérêt à dépenser $1/3$ pour connaître le type de l'agent 2 avec certitude, s'il est dans la situation d'incertitude précédemment décrite ?

Un modèle simple de vente d'entreprises avec information privée

Soit l'histoire suivante :

- Un investisseur est neutre au risque. Il achète des projets dont le rendement $\tilde{R}(\theta)$ est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma)$ (σ est connu). On notera p le prix d'achat d'un projet. Le paramètre θ est le type de l'emprunteur (ou entrepreneur), et on sait qu'il est uniformément distribué $\theta \in [0, 1]$. Cet entrepreneur pourrait garder tout seul son projet, mais il préfère partager son risque avec des investisseurs, car il est averse au risque. On suppose que la VNM de l'entrepreneur est $u(x) = -e^{-\rho x}$.

- Décrire le jeu sous forme stratégique et l'équilibre bayesien correspondant.
- Décrire le jeu sous forme extensive et l'équilibre parfait en sous-jeu correspondant.
- Refaire l'exercice quand θ prend deux valeurs équiprobables.

- On admettra que $Eu(W_0 + \tilde{R}(\theta)) = u(W_0 + \theta - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)$.

Elements de réponse du modèle simple de vente d'entreprises avec information privée

- Il faut definir la stratégie des types des entrepreneurs, a savoir l'ensemble Θ de ceux qui acceptent l'offre. Cette stratégie est définie a tout noeud du jeu, c est un objet du type $\Theta(p)$

Exemple du poker : règle du jeu

On considère un jeu de poker simplifié à deux joueurs (1) et (2) et deux types de cartes, les cartes gagnantes H et les cartes perdantes B. Le jeu se déroule de la façon suivante :

- les deux joueurs misent chacun 1 euro.
- le joueur 1 tire une carte,
- au vu de sa carte il peut soit ≪ laisser ≫ (stratégie L) soit ≪ monter ≫ (stratégie M) en misant de nouveau 1 euro.
- si le joueur 1 laisse alors le joueur 2 ramasse la mise : les paiements sont donc (-1 ;1), c'est à dire : le joueur 1 a perdu l'euro misé, que le joueur 2 a empoché.
- si le joueur 1 monte, alors le joueur 2 peut soit laisser (stratégie l), soit monter (stratégie m) en misant de nouveau 1 euro.
- si le joueur 2 laisse alors 1 ramasse la mise ; les paiements sont donc (1,-1).
- si le joueur 2 monte alors 1 étale son jeu : si c'est une carte H il ramasse la mise, si c'est une carte B c'est le joueur 2 qui ramasse la mise, les paiements sont donc respectivement : si H, (2,-2), si B : (-2,2).

Exemple du poker : analyse du jeu (début)

1.1 On suppose, pour commencer car cela n'a évidemment aucun intérêt, que le jeu est en information complète, c'est à dire que 1 montre sa carte au début du jeu. Ecrire les deux arbres correspondant aux deux cas H et B.
1.2 Toujours en information complète, montrer que l'équilibre du jeu dans le cas H est (MI), et que l'équilibre du jeu dans ce cas B est (L).
On suppose maintenant l'information incomplète : 1 cache sa carte. On suppose par ailleurs que la proportion de cartes H dans le paquet de cartes est égale à q, $0 < q < 1$, et que cette information est connue de tous.
1.3. Intuitivement, expliquer pourquoi le joueur 1 peut être tenté de monter, même avec une carte B. (pas de calcul).
1.4. On se place à l'intant du jeu ou 1 a monté, c'est à 2 de jouer. Soit p la croyance du joueur 2 : la probabilité selon lui que la carte soit de type H. Montrer que si $p > 3/4$ alors 2 a intérêt à laisser, et si $p < 3/4$ alors 2 a intérêt à monter et que si $p = 3/4$ alors 2 peut tirer au sort entre monter et laisser. (le joueur 2 compare les espérances de gain pour choisir sa stratégie)

Exemple du poker : analyse du jeu (fin)

1.5. p étant toujours donné, en déduire la stratégie optimale de 1 selon qu'il a une carte H ou B, dans les deux premiers cas de figure de la question 1.4.
1.6. Montrer que $p < 3/4$ ne peut pas être une croyance d'équilibre. (pour cela on montrera que cette croyance induit une probabilité de H sachant que 1 a monté égale à 1.
1.7. Montrer que $p > 3/4$, est une croyance d'équilibre à condition que $q > 3/4$.
1.8. Pourquoi l'équilibre de la question 1.7. est appelé équilibre de pooling ?Commenter.
1.9. Dans le cas où $q < 3/4$, montrer que les seuls équilibre possibles sont obtenus avec une croyance $p = 3/4$, le joueur 1 possédant une carte B tirant au sort entre M et L avec probabilités $(s, 1 - s)$, le joueur 2 tirant au sort avec une probabilité $(t, 1 - t)$ entre m et l. Calculer s et t en fonction de q. Commenter.