# ECO L1

## Les mathématiques, au service de l'économie ?

## Regards sur les maths

Pour plus de clarté

Pour un langage universel

Pour mesurer les phénomènes

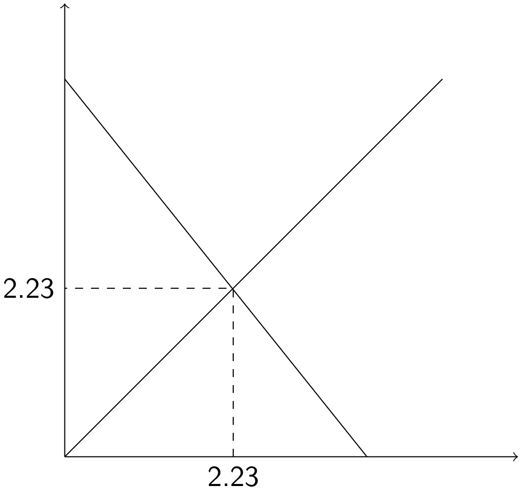
Mais ... la difficulté de la résolution ne doit <u>jamais</u> masquer l'économie du problème, les questions qui se posent.

# PLAN DE LA CONFERENCE

| | |
|---|---|
| La culture | Les mathématiques élémentaires |
| "Ceteris paribus" | - approximations linéaires<br>- économétrie<br>- dérivées partielles |
| Le comportement individuel rationnel | Techniques et théorèmes de Maximisation individuelle |
| Calcul de l'équilibre | - Théorème de la valeur intermédiaire,<br>- Résolution de système de plusieur équations à plusieurs inconnues<br>- Algèbre (espace vectoriels - dimensions<br>- Equations différentielles<br>- Analyse avancée |
| Economie publique (éco du bien-être) | - Calcul de surfaces<br>- intégration, théorie de la mesure |
| Incertain | Probabilités, convexité |

# Les mathématiques élémentaires

- Tracer la droite qui passe par le point (0,0) et par le point (5,5)
- Tracer la droite qui passe par le point (0,5) et par le point (4,0)
- Quelle est l'intersection de ces deux droites, quelle est la pente de chacune de ces droites


2.23
2.23

# Les dérivées d'une variable

Interprétation Le coût d'un firme dépend du nombre de biens qu'elle produit. Par exemple $C(q) = q^2$.

- Quelles sont les propriétés de cette fonction.
- Si le pdg décide d'augmenter sa production de $\varepsilon$, de combien va augmenter son coût ?
- Quelle notion suggérez vous de définir ?

Commenter la formule

$$F(x+\varepsilon) = F(x) + 3,7\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Quel est le graphique correspondant ?

Econométrie ?

# Les dérivées partielles d'une fonction

Dans l'analyse économique, il apparaît que les fonctions dépendent de plusieurs variables. Plus l'analyse est riche, plus il y aura de variable.
Pour comprendre le rôle de chacune des variables, <u>on étudie comment la variation d'une variable, prise isolément, influence la fonction.</u>

**Exemple** Si la demande de bien est $X = X(R, p, p^s)$ où $R$ désigne le revenu du ménage, $p$, le prix du bien, et $p^s$, on calcule l'influence de ces variables, en étudiant

1) le SIGNE,
2) la VALEUR,
des dérivées partielles
c-a-d, ici, $\dfrac{\partial X}{\partial R}$, $\dfrac{\partial X}{\partial p}$, $\dfrac{\partial X}{\partial p^s}$.

<u>AN</u> $X = R\dfrac{1+p^s}{2+p}$ (voir aussi l'exemple $X = R\dfrac{1+p}{2+p^s}$)

# Comportements rationnels

**Définition :** L'économie est une science humaine qui s'intéresse à l'homme, mais à un certain aspect de l'homme, l'homme en tant qu'il a des comportements humains, rationnels et efficaces.

L'agent économique a des *objectifs* qu'il poursuit, mais, il doit les poursuivre étant donné un ensemble de *contraintes* définies par son environnement. Ces contraintes **(1)** limitent ses choix et **(2)** rendent ses choix sensibles à toute *modification de l'environnement économique*

## Programme

Dans les analyses économiques, le comportement de l'agent économique est représenté à travers le type de programme suivant :

| | |
|---|---|
| *maximiser* | un objectif chiffré |
| *tout en* | respectant des contraintes |

l'objectif chiffré, c'est, par exemple, pour une entreprise, le profit. Les contraintes, dans ce cas, ce sont des contraintes technologiques.

# Exemples de maximisation

- $x, y$ étant des nombres positifs, trouver le maximum possible de la quantité $x + y$ sachant que $x^2 y \leq 8$.
- $x, y$ étant des nombres positifs, trouver le minimum possible de la quantité $x + y$ sachant que $x^2 y \geq 8$.
- Une firme produit une quantité $q$ d'un bien et le vend au prix $p$. Pour produire cette quantité $q$, elle doit dépenser $\sqrt{q}$ [la production n'est pas linéaire]. Déterminer la production optimale de la firme. Déterminer la taille optimale de la firme.

# Solutions des exemples précédents

- Le programme diverge. Il suffit de prendre $y = 0$ et $x$ aussi grand que l'on veut.

- Le programme a la solution $x = 2 * 2^{\frac{1}{3}}$, $y = 2^{\frac{1}{3}}$.

- Le profit de la firme est la fonction $\pi(q) = pq - \sqrt{q}$ dont la dérivée $\pi'(q) = p - \dfrac{1}{2\sqrt{q}}$ s'annulle pour $q = \left(\dfrac{1}{2p}\right)^2$

# Méthodes et analyse

Remarquer qu'il ne s'agit pas simplement de savoir résoudre des problèmes,
Il s'agit d'en comprendre les contours,
Ici par exemple, dans un problème de maximisation, la compréhension de la nature des contraintes est par elle même parfois aussi importante que de savoir calculer la solution d'un problème.

# Les mathématiques de l'équilibre

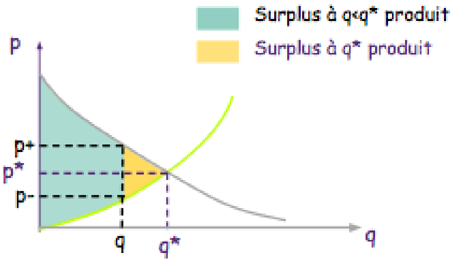
*Théorème de la valeur intermédiaire :* si une fonction d'une variable et continue a des valeurs positives et des valeurs négatives, alors il existe une variable pour laquelle cette fonction est nulle.
*Application à l'équilibre partiel*Soit un marché caractérisé par la fonction de demande suivante : $D(p) = 100 - p$ et par la fonction d'offre $S(p) = p$). Il existe un prix qui équilibre ce marché.
En effet, si on considère la fonction $D(p) - S(p)$. En zéro, elle vaut : 100. En 80 elle vaut $20 - 80 = -60$. Donc on sait qu'il y a un équilibre entre 0 et 80
L'équilibre est ici en $p = 50$, $q = 50$
<u>Noter la très grande différence entre l'économiste qui sait qualifier l'existence d'une solution, du mathématicien appliqué, uniquement capable d'exhiber la solution $p = 50$.</u>

## II - 5 Maximum du surplus net global

Représentons la somme des surplus des producteurs et des consommateurs dans un espace quantité-prix. On représente les cas $q<q^*$ et $q=q^*$.

Pour une quantité q produite et achetée (en dehors de l'équilibre) le surplus est **indépendant** du prix auquel se sont faites les transactions.

Pour tout prix compris entre p- et p+ les q unités produites seront achetées, ni plus ni moins.




**Proposition** : sur le marché d'un bien caractérisé par une fonction d'offre et une fonction de demande, le surplus global de l'économie est maximum pour l'allocation d'équilibre $q = q^*$.

# Mathématiques probabilistes

Un agent peut acheter des actifs de rendement-variance $(r_a, V_a)$ ou des actifs de rendement-variance $(r_b, V_b)$. Il peut composer un portefeuille qui combine ces deux actifs, en prenant une proportion $\lambda$ d'actifs de type $a$ ou $1 - \lambda$ d'actifs de type $b$. On sait que pour un tel portefeuille :

$$r(\lambda) = \lambda r_a + (1 - \lambda) r_b$$

$$V(\lambda) = \lambda^2 V_a + 2\lambda(1 - \lambda)\sigma_{ab} + (1 - \lambda)^2 V_b$$

où $\sigma_{ab}$ désigne la covariance des deux actifs $a$ et $b$.

**Question :** A supposer que $V_a < V_b$, quand un agent désire le portefeuille le moins risqué possible, choisit-il ou non le portefeuille qui ne contient que de l'actif $a$ ?

# Pour finir

Y a t'il de très bons mathématiciens chez les économiste qui publient : OUI
Mais parfois des très mauvais