

# Economie Théorique

## 2

### Alea moral dans les relations investisseur - emprunteur

## who moves first ? SMUF and SMIF

In SMUF, the informed agent knows what the uninformed agent will do in response to each signal. For example, in the Ross [52] model of capital structure, the firm's manager (the informed agent) knows exactly how the capital market will price his firm if he selects a particular debt level. We can view that model as one in which the capital market offers the manager a menu of choices, where each choice is a combination of a debt level and an accompanying market value of the firm.

- un clé l agent non informe a la possibilite de s engager sur ses actions, avant que ne soit dévoile l information
- A moins que e ne soit l equilibre de nash du jeu
- dans bhattacharia, la firme promet des dividendes a vie, et est donc force de faire des emprunts a court terme dans les mauvais etats de la nature.

# Alea moral dans la relation prêteur emprunteur

Jusqu'à présent, nous avons examiné des situations dans lesquelles il n'y a pas de problème de définition des flux. Or, quand il s'agit de loteries, il n'est pas sûr que toutes les parties puissent maîtriser les différents états de la nature. Cette asymétrie va modifier en profondeur la nature des contrats.

Typiquement, dans une relation prêteur emprunteur, le contrat de remboursement d'un investissement  $I$  pourrait dépendre des états de la nature, c'est-à-dire des revenus  $Y$  réalisés par l'investissement. Un contrat est donc une fonction :  $Y \mapsto R(Y)$ , et donc, si la distribution des revenus est connue, un tel contrat engendre, lorsque  $Y$  est vérifiable la distribution :

$$I \begin{cases} \rightarrow \bar{Y} \rightarrow R(\bar{Y}) \\ \vdots \\ \rightarrow \underline{Y} \rightarrow R(\underline{Y}) \end{cases}$$

Cependant, il n'est pas sûr que l'investisseur puisse vraiment contrôler le niveau réalisé de  $Y$ , c'est ce qu'on appelle le Costly state verification. Dans ces cas là, la distribution précédente n'est pas pertinente, à moins que l'on assortisse le contrat d'un mécanisme qui induise l'emprunteur à révéler  $Y$ .

# Plan du cours

0. Brève introduction à l'alea moral
1. Relation investisseur emprunteur sans problème d'information
2. Relation investisseur emprunteur avec costly state verification

## Préambule : effort

Un ou plusieurs agents doivent faire une tâche pour le principal. Ils peuvent choisir plusieurs niveaux d'engagement dans leur tâche, qui se traduisent par un meilleur output. Cependant ce niveau d'engagement qu'on appelle *effort* n'est pas vérifiable, c'est-à-dire qu'on ne peut pas écrire un contrat contingent à l'effort. Aucun tribunal ne pourrait vérifier les conditions des termes du contrat.

Cette hypothèse est en particulier cohérente s'il n'y a pas un lien direct entre l'output et l'action choisie. Deux cas possibles

- ▶ effet aléatoire : le résultat de l'action choisie par l'agent est aléatoire. L'effort permet d'améliorer la *probabilité de succès*
- ▶ effet déterministe : le résultat de l'action choisie dépend aussi d'un autre paramètre qui est caché. On ne sait donc pas quelle est la part d'effort, quelle est la part de ce paramètre caché.

La variable effort n'a pas de définition intrinsèque, elle est souvent définie à travers ses effets, cad les résultats de l'action de l'agent.

## Préambule : effort et output

- ▶ On ne sait pas distinguer l'effort de l'output.
- ▶ L'effort est non vérifiable, il "est caché" dans l'output

$$\text{Output} = \text{Effort} + \text{Alea}$$

$$\text{Output} = \text{Effort} + \text{Variable cachée}$$

# Exemples

L'effort désigne toute variable qui n'est pas vérifiable mais cruellement pertinente pour le principal.

- ▶ La prudence d'un assuré affecte son exposition au risque, soit la probabilité d'occurrence d'un accident, soit la gravité d'un accident
- ▶ le niveau d'investissement d'une firme régulée réduit ses coûts de production d'un bien public
- ▶ La qualité du travail d'un employé améliore la réussite d'un produit et les bénéfices de la firme
- ▶ L'ardeur au travail d'un étudiant augmente sa culture et son jugement

# Les incitations monétaires

Une manière assez courante d'*inciter* les agents à faire des bons choix est de les rémunérer. C'est un principe de base de la gestion des firmes. C'est une application directe du principe de révélation généralisé.

On appelle *incitation monétaire* tout système de transfert du principal vers le/les agents, qui est contingent à une variable observable qui est corrélée avec la variable non observée.

- ▶ La franchise de l'assuré peut être compris comme un montant variable de sa prime contingente à ses sinistres
- ▶ Les prises de participation dans les résultats de la boîte, les primes des salariés, sont des instruments qui partagent le risque entre le principal-employeur et les salariés. Le salaire est contingent aux "résultats" de la firme
- ▶ Fermage ou metayage? En France, le *métayage* est un type de bail rural dans lequel un propriétaire, le bailleur, confie à un métayer le soin de cultiver une terre en échange d'une partie de la récolte. Le *fermage* est le loyer du contrat passé entre le bailleur et le fermier (affermage) dont le montant est convenu à l'avance et indépendant des résultats d'exploitation.



# Diversité des mécanismes

On appelle *incitation* tout instrument par lequel le principal peut modifier l'utilité du/des agents, de manière contingente à une variable observable qui est corrélée avec la variable non observée.

- ▶ Sur un plateau de téléopérateurs, en appels sortants, on donne une place de cinéma à celui qui a obtenu le meilleur résultat de la journée [en taux d'accord par exemple] : Ces *incentives* fonctionnent en général très bien, alors qu'elles sont bien inférieures en valeur à la valeur d'une heure travaillé.
- ▶ Une des premières idées de la Grameen Bank était de punir les membres de la famille de l'emprunteur, en ne leur permettant pas d'emprunter à leur tour, si l'emprunteur faisait défaut. Ici, l'utilité est modifiée via le jeu qu'il peut y avoir entre emprunteur et sa famille
- ▶ Lorsque l'employeur se la joue copain avec ses employés, ceux-ci peuvent mieux travailler. On observe parfois des relations de dévouement qui ne sont pas toujours facilement modélisables.

# Ce que produisent les mécanisme de second rang

## Problématique

En général, le mécanisme mis en place pour inciter l'agent à faire l'effort donne plus d'utilité à l'agent que dans la situation où l'effort est vérifiable. C'est donc un mécanisme coûteux pour le principal.

Par exemple dans une économie où l'effort de l'agent conditionne la réussite d'un projet où son échec, un mécanisme se traduira par le fait de donner un salaire dépendant du résultat, ce qui, en théorie, lorsque l'on suppose que le Principal est neutre au risque et que l'Agent est averse au risque ne devrait jamais arriver au premier rang : en effet, par ce différentiel de salaire, on fait porter une partie du risque du projet par le salarié, ce qui n'arrive jamais au premier rent.

## Preuve

Notons  $R(\Psi) \geq 0$  la rente informationnelle que le principal doit payer au second best, en supplément à ce qu'il donnerait normalement au premier rang, à savoir  $h(\Psi)$ . La condition sous laquelle le principal incite l'agent à faire l'effort au second rang est telle que la différence de salaire entre les deux situations de réussite et d'échec doit être supérieure à un certain seuil.

# Modèle Principal-Agent à plusieurs niveaux d'efforts

- Quelle est la forme du mécanisme incitatif?
- Monotonie du ratio de vraisemblance
- Monotonie des transferts sous MLRP

# Modèle à $n$ réalisations

## Problématique

Il y a toujours deux niveaux d'effort possibles,  $e \in \{0, 1\}$ , mais  $n \geq 3$  niveaux de performance,  $q_1 < \dots < q_i < \dots < q_n$ . La distribution des réalisations est contingente à l'effort :

$$\pi_{ie} = Pr(q_i|e) > 0 \quad \forall i, \forall e$$

## Exemple

Probab d'occurrence de ...	$q_1$	$q_2$	$q_3$
si $e = 0$	1/3	1/3	1/3
si $e = 1$	1/6	1/3	1/2

## Exercice

Calculer la probabilité que  $e = 1$  si  $q_1$  apparaît, puis que  $e = 1$  si  $q_2$  apparaît, et enfin que  $e = 1$  si  $q_3$  apparaît. Qu'en déduisez-vous ?

# Implémentation et Mécanisme optimal si $e = 1$

Programme optimal

$$\begin{aligned} \max_{t_1, t_2, t_3} & & & - \sum_i \pi_{i1} t_i \\ \text{s.c.} & & & \sum_i \pi_{i1} u(t_i) \geq \Psi & (\lambda) \\ & & & \sum_i (\pi_{i1} - \pi_{i0}) u(t_i) \geq \Psi & (\mu) \end{aligned}$$

Conditions premières

$$u'(t_i) = \frac{\lambda}{1 - \mu \frac{\pi_{i0}}{\pi_{i1}}}$$

- ▶  $u'(t_i)$  croissant avec  $\frac{\pi_{i0}}{\pi_{i1}}$
- ▶  $u'(t_i)$  croissant avec  $\frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0}}$
- ▶  $u'(t_i)$  croissant avec  $Pr(e = 1|i) = \frac{Pr((e=1)\&(i))}{Pr(i)}$   
$$= \frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0} + \pi_{i1}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0}}}$$

# L'exemple revisité

Propriété du mécanisme optimal

$$t_1 < t_2 < t_3$$

Valide uniquement parce que la vraisemblance que  $e = 1$  est croissante avec  $i$

Résoudre dans le cas  $u(x) = \ln(x)$  et  $\Psi \leq 1$

Cad trouver  $\lambda$  et  $\mu$  positifs ou nuls.

- Que se passe t'il dans le cas  $\Psi \geq 1$  ?

## Contrat de prêt avec un investisseur neutre au risque

- Un optimum de Pareto est la solution du programme

$$\begin{aligned} \max_{R(Y)} \quad & E(U(Y - R(Y))) \\ \text{s.c.} \quad & -I + E(R(Y)) \geq \underline{\Pi} \end{aligned}$$

- ▶ Le lagrangien de ce problème est  $L = E(U(Y - R(Y))) + \lambda(E(R(Y)) - I)$

On dérive, niveau de  $Y$  par niveau de  $Y$

d'où  $\forall Y : U'(Y - R(Y)) - 1 = \lambda$

$Y - R(Y)$  constant : risque porté par l'investisseur

■ *cela ne ressemble pas au contrat de dette standard, où le risque est pris par l'emprunteur (intérêt fixe).*

- ▶ Remarquez que ce résultat implique que dans tout EG, le risque sera porté par l'investisseur, c'est à dire que l'on ne prêche pas un *contrat de dette*. Est-ce compatible avec le résultat de Modigliani Miller ?

## Contrat de prêt entre deux agents averses au risque

- Un optimum de Pareto est la solution du programme

$$\begin{aligned} \max_{R(Y)} \quad & E[U_B(Y - R(Y))] \\ \text{s.c.} \quad & E[U_L(R(Y) - I)] \geq U_L^0 \\ & 0 \leq R(Y) \leq Y \end{aligned}$$

la dernière équation est une contrainte de liquidité. On aurait pu la considérer dans le programme précédent.

- ▶ après calcul, on trouve ( $A(x)$  étant le coef. Arrow-Pratt)

$$u'_B(Y - R(Y)) = \mu u'_L(R(Y) - I)$$

$$\text{d'où } \forall Y : R'(Y) = \frac{A_B(Y - R(Y))}{A_B(Y - R(Y)) + A_L(R(Y) - I)} = \frac{1}{1 + \frac{A_L}{A_B}}$$

Le remboursement est très variable quand l'emprunteur B est PLUS averse au risque avec que l'investisseur (On retrouve le résultat précédent ( $R'(Y) \approx 1$ ), et quasi-constant dans le cas inverse ( $R'(Y) \approx 0$ ))



## Contrat de prêt entre deux agents averses au risque, les variables du contrat

Si l'on généralise l'étude précédente, on comprend que la question est de savoir de quelles variables les contrats de dette vont dépendre. En particulier, de quoi vont-ils dépendre si l'on considère

- le risque sur le taux d'intérêt ?
  - le risque d'inflation ?
- En suivant la même logique de partage de risque,
- le niveau de remboursement (en termes réel) est indépendant de l'inflation et du niveau des prix
  - le risque de taux est partagé en proportion inverse de l'aversion absolue pour le risque des agents, On peut en effet calculer la variation du remboursement en fonction de  $r$ , on trouve

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{I_L}{I_L + I_B} I$$

## Avec des coûts de vérification de l'état : *Costly state verification*

A supposer que le revenu de l'emprunteur ne soit pas directement vérifiable, à moins d'un coût de vérification non négligeable, si l'on veut encore opérer un partage de risque entre prêteur et emprunteur, on doit avoir recours à des *mécanismes* qui précisent quand il y aura un audit et comment un tel audit pourra affecter les paiements.

Plus précisément, un contrat peut être décrit comme :

- ▶ Une fonction de remboursement  $\hat{Y} \mapsto R(\hat{Y})$  où  $\hat{Y}$  est le revenu *déclaré* par l'emprunteur
- ▶ une règle d'audit, c'est à dire un sous-ensemble  $S$  des déclarations de l'emprunteur pour lesquelles il y aura un audit
- ▶ Une fonction de pénalité  $P(Y, \hat{Y})$  précisant un transfert additionnel de l'emprunteur lorsque l'on est convaincu qu'il a fait une fausse déclaration.

# Mécanisme direct révélateur

Le *Principe de Révélation* démontre que l'on peut se restreindre à la recherche de certaines classes de mécanismes, qui, bien que restreinte, conduisent à l'optimum de Pareto.

## **Définition**

On dit que le mécanisme  $(R(\cdot), S, P(\cdot, \cdot))$  est direct et révélateur s'il induit l'agent à faire des déclarations vraies.

# Propriété des mécanismes direct révélateurs avec pénalité infinies

- ▶ Il est immédiat que si l'on peut avoir recours à des pénalités très élevées, on pourra induire l'emprunteur à dire la vérité, au moins dans la zone  $Z$  où il est audité.  
Dit-autrement, cela signifie qu'il n'y a pas de rente qui soit associé aux justes déclarations de l'emprunteur.
- ▶ Par ailleurs, la fonction de remboursement  $R(\cdot)$  doit être constante sur la zone de déclaration où l'emprunteur sait qu'il ne sera pas audité. On note  $R$  cette constante. [Sinon l'emprunteur n'aurait pas intérêt à dire qu'il a un résultat correspondant à un remboursement élevé (parmi ceux qu'il peut avoir sans audit).]
- ▶  $R$  ne peut pas être inférieur au remboursement maximum sur la zone d'audit, [car sinon, l'emprunteur aurait intérêt, pour ces réalisations  $Y \in S$  pour lesquelles un niveau de remboursement  $> R$  est prévu, de reporter un message dans la zone de non-audit (afin de rembourser la somme  $R$  plus faible).]

## Contrat optimal avec une vérification coûteuse de l'état : cas risque neutre

On peut alors représenter un contrat de second best par un contrat  $(R(\cdot), S, +\infty)$  qui satisfait

$$\text{si } Y \in S : R(Y) = Y \quad (\hat{Y} = Y)$$

$$\text{si } Y \notin S : R(Y) = R \quad (R(Y) \text{ indépendant de } \hat{Y})$$

- Un contrat optimum de Pareto est la solution du programme

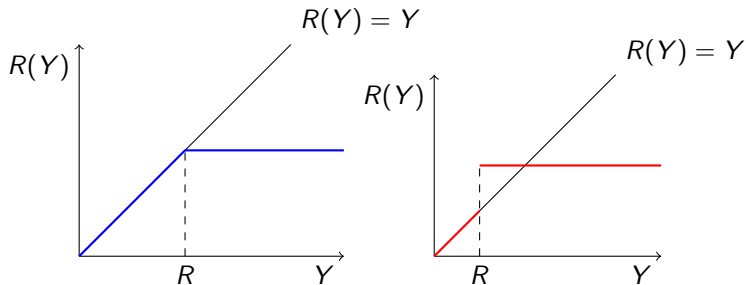
$$\begin{aligned} \max_{R(Y)} \quad & E(Y - R(Y)) \\ \text{s.c.} \quad & I - E(R(Y)) - C(S) \geq \underline{\Pi} \end{aligned}$$

La contrainte de ce programme est saturée. Aussi, en minimisant  $C(S)$ , on permet de minimiser  $R(Y)$ .

- ▶ A cette fin, il faut donc que le revenu dans les cas d'audit soit maximal :  $R(Y) = Y$ .
- ▶ Si  $R$  est le niveau fixe de remboursement, il est supérieur à ce qui est obtenu en audit, d'où  $S \subset \{Y \leq R\}$ .

## Contrat optimal avec une vérification coûteuse de l'état : cas risque neutre (suite)

Pour assurer la continuité de ce mécanisme de repaiement, on obtient que l'audit se déroule sur tout l'intervalle  $[0, R]$ . Une fois choisi  $R$ , on obtient :



A savoir, un contrat de dette standard, hormis dans les cas de non-remboursement (bankruptcy), où tout le revenu est repris par l'investisseur.