Economie Théorique

1

Incertain ; Coordination ; Mécanismes et incitations

Décisions en entreprise et sur les marchés financiers

M2 Economiste d'Entreprise - Arnold Chassagnon, Université de TOURS, PSE - Hiver 2016

Préambule

Ce cours présente les problèmes de décisions et de coordinations dans les entreprises et sur les marchés, tels qu'ils sont perçus dans la littérature économique récente, avec une emphase plus particulière sur les aspects financiers, afin que l'analyse et la compréhension de la théorie et de la pratique de la finance puisse éclairer et aider *vos* prises de décisions futures.

Ce cours abordera en particulier la question des moyens de financement externe en se concentrant plus particulièrement sur les aspects institutionnels de l'acquisition du capital. La structure du capital d'une firme est étudiée en détail, en évoquant en particulier les imperfections de marchés comme les impôts, les problèmes d'agence et la dynamique de l'information.

Asymétries d'information & finance d'entreprise

"L'asymétrie d'information sur les marchés financiers a été la source de deux voies de recherche bien distinctes. La première (initiée par Bhattacharya, 1979 ; Ross, 1977 ; Leland et Pyle, 1977...), essentiellement préoccupée par les asymétries d'information existant entre les investisseurs et les entrepreneurs, étudie comment il est possible de résoudre ces asymétries en utilisant la théorie des signaux.

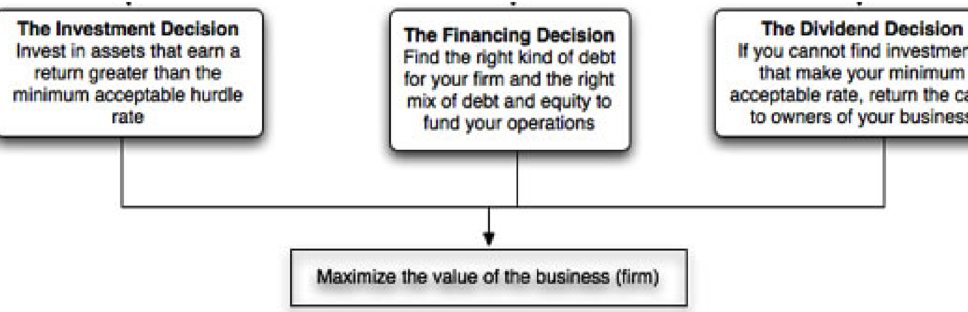
La résolution de l'asymétrie d'information passe alors, en général, par l'utilisation de variables étrangères au marché (les dividendes, la part personnelle investie dans son projet par l'entrepreneur, etc..) qui permettent aux agents non informés d'obtenir des informations sur la valeur du projet dans lequel ils doivent investir."

La seconde voie . . .

La seconde voie de recherche (initiée par Grossman, 1976) étudie les asymétries d'information entre investisseurs. Elle s'attache à montrer, en utilisant les concepts développés par la théorie des équilibres en anticipations rationnelles, que le prix d'un titre financier peut permettre de résoudre les asymétries d'information existant entre les agents ayant accès à des informations privilégiées sur la valeur du titre (les initiés) et les autres agents (les agents non informés).

Les projets *(business)*

Tout projet comporte trois étapes : l'investissement, le financement de l'investissement, la rémunération de l'investissement dont l'objet est la recherche du plus grand profit



Contrats financiers et chaines de décisions

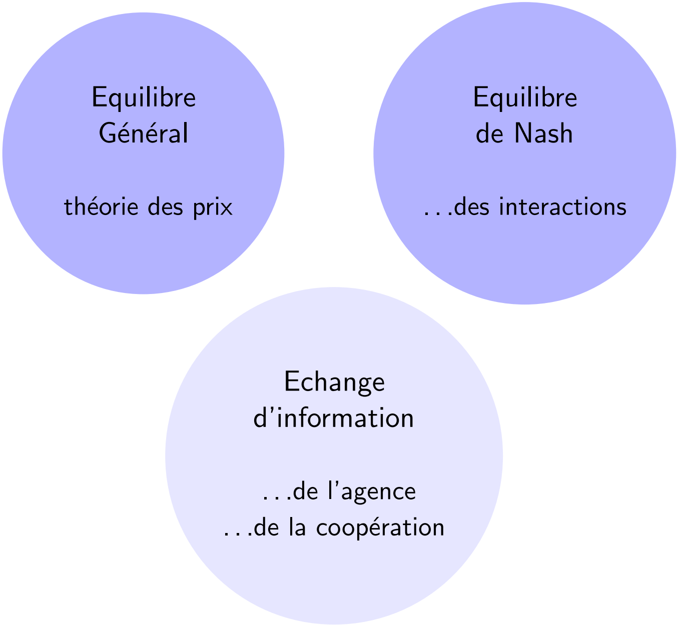
Dans la pratique, vous rencontrerez des contrats financiers déjà en vigueur. Il est important de savoir analyser leur genèse.

- Qu'est-ce qu'un contrat financier ?
  - un contrat financier est le détail de l'un des trois moments (décision d'investir, financement de l'investissement, rémunération de l'ensemble) ou de l'ensemble d'un projet économique.
- Quels sont les déterminants des contrats financiers ?
  $\Rightarrow$ Quelles sont les rationalités à l'oeuvre ?
  - cad quels sont les degrés d'interaction entre les agents économiques
  - cad quelles sont les anticipations des agents et les information dont ils disposent

Quelle est la rationalité des décisions économiques ?

- l'homme auquel on s'intéresse a des comportements humains, *rationnels* et efficaces.
  - Dans la connaissance de ses contraintes, *l'individu* choisit au mieux en fonction de ses objectifs
- L'*équilibre* décrit le résultat attendu des interactions quand il y a *plusieurs* agents en présence.
  - L'analyse de l'équilibre diffère selon qu'on considère des agents plus ou moins élaborés,
  - c-a-d selon le degré d'anticipation des agents, selon l'information dont ils disposent

Trois branches de l'analyse économique



Equilibre général

- On fait l'hypothèse en équilibre général que les décideurs poursuivent des objectifs bien définis et qu'ils prennent en compte leurs anticipations qui concernent les prix présents et à venir dans l'économie.

- On dit qu'on est à l'équilibre quand les prix sont "stables", cad quand l'offre égale la demande.
  - la valeur des actifs est celle qui équilibre les marchés
  - on considère l'équilibre sur tous les marchés (marchés des biens ET marchés financiers)
  - en particulier, il n'y a pas d'arbitrage possible $\Rightarrow$ différents moyens de financement sont équivalents
  - les prix (et les valeurs des actifs) intègrent seulement les fondamentaux du marché : les caractéristiques de la production et de la demande de consommation

Théorie des jeux

- On fait l'hypothèse en théorie des jeux que les décideurs poursuivent des objectifs bien définis et qu'ils prennent en compte leurs savoirs et leurs anticipations concernant les décisions des autres joueurs.

- On dit qu'on est à l'équilibre quand aucun agent n'a intérêt à dévier de ses choix, *de manière unilatérale*
  - c'est la définition de l'équilibre de Nash
  - 'à distinguer de toute considération d'efficacité)
  - le recours à la théorie des jeux suppose des interactions stratégiques entre les agents
  - ces interactions stratégiques apparaissent quand on prend en considération des ingrédients de l'économie autres que les fondamentaux

Anticipations, informations exogènes et endogènes

- Les décisions des joueurs dépendent des informations dont ils disposent. Quand les agents disposent d'information différentes, on distinguera généralement trois temps de cette information :

- *ignorance*	- *ex ante*	- *ex post*
Derrière le *voile de l'ignorance*, l'info. est symétrique, $\theta \in F(\theta)$	Un agent qui a un *avantage informationnel* apprend son info, θ	Le marché réagit, et souvent, conduit à *révéler* cette information privée

- Typiquement, *ex ante* les agents peuvent avoir une information privilégiée exogène, mais ils perdent cet avantage *ex post* à l'équilibre économique. L'info devient publique ou endogène.

Plan du cours

0. Préambule : contrats financiers dans un monde imparfait : les outils de l'analyse.

1. Rappels brefs de la théorie des prix

2. Premiers éléments de théorie des jeux

1. Microéconomie et théorie des prix

Tout modèle (microéconomique) de l'équilibre sur tous les marchés analyse l'économie en cinq étapes :

- Caractéristiques des agents : consommateurs et firmes ;
- Actions : choix des variables de quantité suivant les objectifs ;
- Modes d'interaction : actions coordonnées *par les prix* (=info) ;
- Résultats : prédiction sur le niveau des prix (et des quantités) ;
- Les énoncés normatifs : analyse du bien être et politiques éco.

Agents & leur info & leurs choix de variables

Les consommateurs
- sont incertains sur leurs revenus futurs
- achètent des loteries continues ou discrètes
- connaissent imparfaitement les prix futurs

- Leur bien être est calculé comme une espérance d'utilité. Ainsi, s'ils achètent une loterie qui avec proba identique vaut 0 ou 100, leur espérance d'utilité est $U = 0,5u(0) + 0,5u(100)$.
  - *Prime de risque pour une telle loterie quand $u(x) = \sqrt{x}$?*

Les firmes
- recherchent le profit le plus élevé en incertain
- anticipations imparfaites des prix futurs et/ou la demand
- conflits d'actionnaires = divergences d'analyses

- Les dividendes sont une loterie, évaluée selon les règles EU ; parfois, on considèrera $E(\Pi)$ et non $E(U(\Pi))$.

Quelques résultats de référence en finance

- Tous les prix sont connus à l'équilibre et il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage
- Si un actif financier se décompose comme la somme de deux autres actifs, son prix à l'équilibre est égal au prix des deux autres actifs
- Le prix du financement d'un projet est égal au prix de l'actif qui réplique les différents flux de ce projet : d'où le théorème d'équivalence entre les prix des différents types de financement
- Le prix d'une firme est égal à la somme actualisée de ses dividendes futurs

Le contexte de ces résultats : une hypothèse centrale
les prix et la description des actifs (y compris de tous les états de la nature & de leur probabilité d'occurence) sont connaissance commune de tous les acteurs de l'économie.

2. Elements de théorie des jeux

- Description d'un jeu
- Représentation sous forme extensive d'un jeu
- Représentation sous forme normale d'un jeu
- Elimination des stratégies fortement dominées
- Equilibre de Nash (existence, efficacité, stratégies mixtes)
- Equilibre Bayesien (développé dans le prochain chapitre)

Le cadre de la théorie des jeux

Un jeu est une représentation formelle d'une situation dans laquelle un certain nombre d'individus rationnels doivent prendre des décisions qui les affectent mutuellement. Ces individus sont soumis à une interdépendance stratégique, c'est-à-dire que le sort de chaque joueur ne dépend pas seulement de ses propres actions, mais également des actions des autres joueurs. Dés lors, les actions que choisit un individu dépendent de ses anticipations sur les actions des autres.

Un jeu est décrit par

- la liste des joueurs
- les régles du jeu, cad les actions et les interactions
- les résultats du jeu dans les différentes situations

Exemple

Jeu de la Corde (VAYDAY) ou des gladiateurs

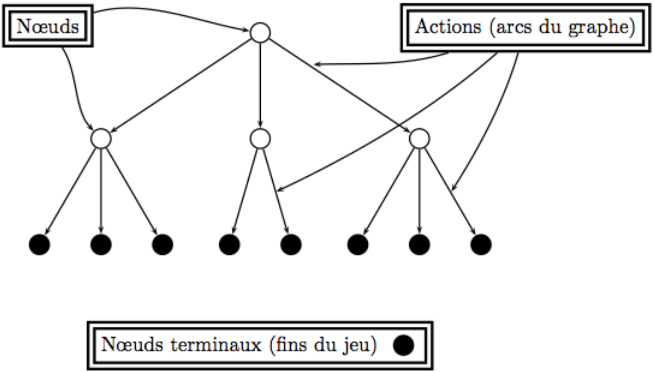
Deux joueurs, de caractéristique identique, postés de chaque côté d'une corde doivent choisir le niveau d'effort qu'ils doivent fournir pour l'emporter. L'effort, e, est compris entre 0 et 1 ($e \in [0, 1]$). On notera e_a et e_b les efforts respectifs fournis par les deux joeurs Leur paiments sont les suivants :

- S'ils gagnent : $1 - e$
- Si ex eaquo : $\max(\frac{1}{2} - e, 0)$
- S'ils perdent : 0

Trouver l'équilibre UNIQUE de ce jeu. Interpréter, en considérant le cas où 0 signifie la mort.

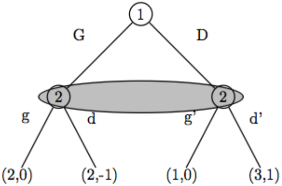
jeux sous forme extensive

Un jeu est sous forme extensive quand il est représenté comme un arbre. Chaque action est représentée par une branche. Chaque branche est issue d'un noeud géré par un (et un seul) joueur. Un arbre commence en un noeud appellé noeud initial et se caractérise par la propriété suivente : tout noeud est relié au noeud initial par un seul chemin formé de branches et de noeuds. Des utilités sont associées à chaque noeud terminal de l'arbre.



information dans les jeux sous forme extensive

Un jeu est dit à information parfaite si au moment de jouer, tous les joueurs sont informés de l'action qui a été choisie précédemment par leur rival.



Le concept d'ensemble d'information permet de formaliser l'information imparfaite. Formellement, un ensemble d'information est un sous-ensemble des noeuds de décision d'un joueur. Les ensembles d'information d'un joueur forment une partition des noeuds gérés par ce joueur. L'interprétation est qu'un joueur ne peut distinguer les noeuds déun même ensemble d'information. Les actions disponibles en chaque noeud d'un même ensemble d'information sont donc identiques.

jeu sous forme normale (sous forme stratégique)

Un concept central de la théorie des jeux est celui de stratégie d'un joueur. Une stratégie est un plan contingent complet, une régle de décision qui spécifie le choix du joueur dans toutes les circonstances dans lesquelles il pourrait avoir à choisir une action. En d'autres termes, la stratégie d'un joueur est une planification du choix de ses actions à chacun de ses ensembles d'information. Spécifier une stratégie, c'est comme écrire un livre d'instructions avant de jouer, qui permette de déléguer ses choix. Un représentant pourrait agir au nom d'un joueur, en toutes circonstances, en consultant le livre.

Exemple

Dilemne du prisonnier

Deux hommes sont arrêtés dans une situation louche, et la police veut les faire avouer. S'ils *avouent* tous les deux, ils vont en prison pendant une année, s'ils *nient* en bloc, ils sont relâchés. Si l'un des deux avoue seulement, il est relâché, avec une prime, et l'autre est emprisonné pendant dix années. On représente ce jeu en décrivant les bénéfices dans ces quatre situations :

	A	N
a	-1,-1	+1,-10
n	-10,+1	0,0

Trouver les stratégies d'équilibres de ces deux hommes, s'ils sont interrogés dans des pièces différentes, sans pouvoir communiquer, tout en connaissant les régles du jeu.

Quelques équilibre de Nash

Calculer les équilibres de Nash du jeu lorsque les espaces de stratégies pour les deux joueurs sont $S_1 = S_2 = [0,1]$ avec les fonctions de payoff suivantes :

a) ▶ $$g_1(x,y) = 5xy - x^2 - y^2 + 2$$ $$g_2(x,y) = 5xy - 3x^2 - 3y^2 + 5$$

b) ▶ $$g_1(x,y) = 5xy - x - y + 2$$ $$g_2(x,y) = 5xy - 3x - 3y + 5$$

c) ▶ $$g_1(x,y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$$ $$g_2(x,y) = (x + y - 1)^2$$

d) ▶ $$g_1(x,y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$$ $$g_2(x,y) = (x - y)^2$$

Elimination des stratégies fortement dominées

On dit qu'une stratégie d'un joueur est fortement dominée, s'il existe une autre stratégie qui lui donne un plus grand payoff, quels que soient les actions des autres joueurs

Si un ensemble de stratégie résulte de l'élimination des stratégies dominées de tous les joueurs c'est un équilibre de Nash :

- cf. le dilemne du prisonnier

Remarquons que l'élimination itérative des stratégies strictement dominées repose sur l'hypothése de connaissance commune des utilités et de la rationalité des joueurs. L'élimination des stratégies strictement dominées nécessite seulement que chaque joueur soit rationnel, alors que l'élimination itérative des stratégies strictement dominées que nous venons d'effectuer nécessite non seulement que le joueur 2 soit rationnel, mais également que le joueur 1 sache que le joueur 2 est rationnel.

Non existence ou multiplicité

Pierre, ciseaux, feuille

Ciseaux coupent feuille, qui emballe pierre, qui casse ciseaux

	P	C	F
p	0,0	-1,1	+1,-1
c	-1,+1	0,0	+1,-1
f	+1,-1	-1,+1	0,0

Pas d'équilibre

Bataille des sexes

Mari et femme doivent se retrouver au spectacle, mais ils ne savent pas si c'est au Théâtre ou à la Boxe, et ils ne peuvent communiquer :

	T	B
t	3,2	1,1
b	1,1	2,3

Deux équilibres.

Existence d'un équilibre de Nash

L'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu est liée à l'existence d'un point fixe dans la correspondance de meilleure réponse. Les théorémes de points fixes permettent ainsi de caractériser les situations dans lesquelles un équilibre existe. Le résultat le plus communément utilisé est le suivant :

Theorem

1. *Dans un jeu fini, il existe toujours un équilibre de Nash, au moins en stratégie mixte*
2. *sinon, dans le cas général il existe un équilibre de Nash*
   - *Si les ensemble de stratégies sont des convexes, compacts,*
   - *Si les fonctions de paiement sont quasi-concaves et continues,*

Equilibre de Nash en stratégie mixte

Un joueur de football qui tirerait les pénaltys toujours du même côté, un joueur de tennis qui servirait toujours du même côté, ne se comporteraient pas de façon très intelligente car leurs adversaires anticiperaient leurs actions et pourraient les contrecarrer facilement. Dans de telles situations, il est essentiel de se comporter comme si le hasard déterminait l'action.

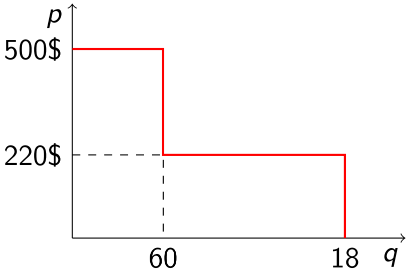
Une stratégie mixte est une distribution de probabilités sur des stratégies pures (i.e., pour le joueur i, sur S_i). Une stratégie pure $s_i \in S_i$ est donc une stratégie mixte correspondant à une distribution de probabilités dégénérée, i.e., qui donne une probabilité 1 à s_i et 0 à toute autre stratégie.

jeu du penalty, entre le goal (1) et le buteur (2)

	$p(G) = \beta$	$p(D) = 1 - \beta$
$p(g) = \alpha$	1,-1	-1,1
$p(d) = 1 - \alpha$	-1,1	1,-1

- Trouver les stratégies mixtes qui forment un équilibre de Nash. $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ conviennent-ils ?

Exemple de la guerre des prix



Supposez qu'American et Delta font face à la demande suivante, qu'ils se partagent également le marché lorsqu'ils offrent le même prix et que le coût unitaire d'un vol est de 200$. Quels sont les équilibres sur ce marché ?

	$p_A = 500\$$	$p_A = 220\$$
$p_D = 500\$$	9000,9000	3600,0
$p_D = 220\$$	0,3600	1800,1800

- Un équilibre de Nash en stratégie dominante,
- Un équilibre de Nash en stratégie mixte

Transformer une histoire en un jeu

Soit l'histoire suivante :

- Un piéton qui ne traverse pas au passage clouté dans un pays où les automobilistes ont un comportement peu civilisé résout un problème élémentaire en théorie des jeux, dans la mesure où il anticipe correctement le comportement vraisemblable des autres. Réciproquement, il en va de même pour l'automobiliste peu courtois qui s'attend à ce qu'un piéton ne traverse pas lorsque sa voiture approche d'un passage clouté, étant donné la mauvaise réputation des automobilistes dans le pays. En définitive, chacun d'entre nous est quotidiennement impliqué dans des situations relevant de la théorie des jeux.

- Décrire un jeu et l'équilibre (en stratégie mixte) correspondant qui décrit cette situation entre le piéton et l'automobiliste, en appellant p la probabilité que le piéton traverse le passage clouté à l'approche du voiture et q la probabilité que la voiture ne s'arrête pas au passage clouté.

Les payoffs (piéton, voiture) sont les suivants : si le piéton traverse et que la voiture passe (-1, α) ; si le piéton traverse et que la voiture ne passe pas (1,0) ; si le piéton ne traverse pas et que la voiture passe (0,1) ; si le piéton ne traverse pas et que la voiture ne passe pas (0, 0).

2. Elements d'économie de l'incertain

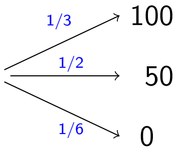
- Représentation objective du risque
- Représentation subjective du risque
- Partage du risque avec un agent neutre au risque

Distributions du risque

Distributions discrètes

Il y a un nombre fini d'évènements possibles $i \in \mathcal{I}$, chacun avec probabilité p_i. Cette association à chaque évènement de sa probabilité, c'est ce qu'on appelle la **distribution** des risque. Cette distribution satisfait toujours la contrainte

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = 1$$



Distributions continues

Il y a un nombre infini, voire continu d'évènements possibles : chacun, pris isolément apparaît avec une probabilité nulle. La fonction de **repartition** décrit le poids relatif des évènements de faible gain par rapport aux évènements de gains plus élevés.

$$F(x) = Prob(X \leq x)$$

Fonctions de répartition

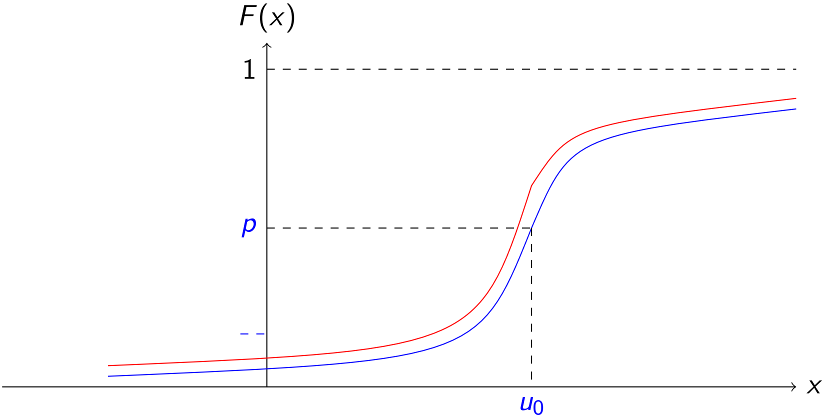
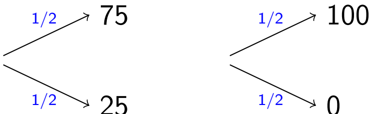


Figure: deux fonctions de répartitions : F et G

Statistiques

- Moyenne — $\sum_i$ probabilités * richesses
  dans l'exemple précédent, moyenne=50
- Variance — une mesure de la distance à la moyenne.
  exemple : la distribution $\mathcal{A}$ a une plus grande variance que la distribution $\mathcal{B}$.



$$VAR(\mathcal{B}) \leq VAR(\mathcal{A})$$

- Modes — représente le/les évènements avec la plus grande probabilié
- Fractiles — Divise la population en classes égales, représentées par une richesse pivot.

Statistiques - Pour aller plus loin

Il y a en fait deux familles de statistiques :

les *statistiques de position* dont l'objectif est de donner un ordre de grandeur des valeurs observées

les *statistiques de dispersion* qui évaluent le niveau d'étalement de la série autour de la valeur centrale.

Les paramètres de position (ou valeurs centrales) sont des valeurs numériques qui « résument » une série statistique en caractérisant l'ordre de grandeur des observations. Ils s ?expriment dans la même unité que les observations. Les paramètres de position permettent de situer la position de plusieurs séries comparables. Lorsque la distribution est parfaitement symétrique, mode, moyenne et médiane sont confondues.

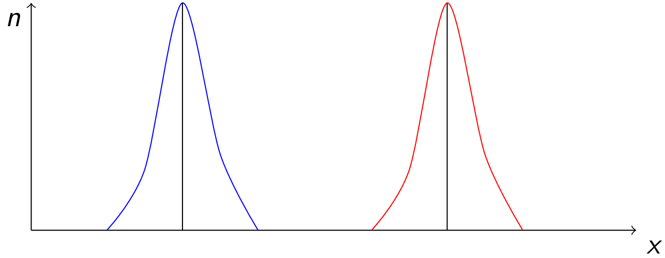


FIGURE: Les deux courbes ont la même allure, mais ne se positionnent pas du tout au même endroit sur l'axe des valeurs (des modalités). Les paramètres de position le mettent clairement en évidence.

Moyenne arithmétique d'un ensemble de N nombres

Définition

La moyenne arithmétique de N nombres est égale à la somme de ces nombres divisée par leur nombre.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

Exemple simple

3 individus, gagnent respectivement 10.000 euros, 20.000 euros et 30.000 euros. La moyenne de leur revenu est 20.000 euros.

Remarque

La moyenne arithmétique est exactement la quantité qui pourrait être identiquement distribuée à chaque individu. En effet, la conséquence directe de la définition de $\bar{x}$ est : $N\,\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$.

Moyenne arithmétique d'une distribution

Dans le cas d'une distribution, il faut prendre en compte la fréquence d'apparition de chacune des réalisations.

Cas discret : à partir du tableau de fréquences

Une variable X prend les valeurs x_i avec la fréquence f_i pour $i = 1, \ldots, N$. La moyenne de cette variable est

$$\bar{X} = \sum_i f_i \; x_i$$

- la comparaison avec la formule du transparent précédent est immédiate. $\frac{1}{N}$ est remplacé par la fréquence (individualisée) de chaque réalisation f_i.

Cas continu : à partir de la fonction de distribution

Un variable X est définie par sa fonction de distribution $f(x)$, sa moyenne est

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f(x) dx$$

Distribution représentée comme un bruit blanc autour d'une moyenne

Quand il n'y a pas trop de dispersion autour de la moyenne, il est assez naturel de représenter une distribution comme étant une valeur certaine autour de laquelle il y a un bruit blanc.

Définition Un bruit *blanc* est une variable aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ dont la moyenne est nulle ($E(\tilde{\varepsilon}) = 0$) dont les réalisations sont faibles en regard de la valeur (de position) x.

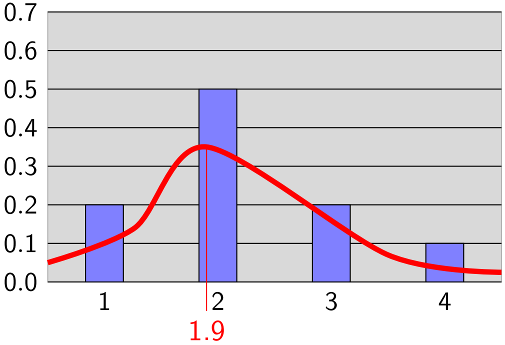
Exemple Soit la variable aléatoire $\mathcal{A}$ suivante, on peut la représenter comme la somme de sa moyenne et du bruit blanc $\tilde{\varepsilon} = \mathcal{A} - E[\mathcal{A}]$:

$$\mathcal{A}\begin{array}{l} \xrightarrow{1/2} 50,3 \\ \xrightarrow{1/2} 50,1 \end{array} \quad = \quad 50,2 \quad + \quad \tilde{\varepsilon}\begin{array}{l} \xrightarrow{1/2} 0,1 \\ \xrightarrow{1/2} -0,1 \end{array}$$

Tout se passe comme si un agent qui était exposé au risque représenté par $\mathcal{A}$ recevait la valeur sûre 50,2, dans un premier temps, cad la moyenne, et qu'avec égale probabilité, il perde (ou il gagne) à partir de cette valeur sûre -0,1 (ou +0,1).

Le mode, défini pour toute variable aléatoire

Le mode d'une variable qualitative ou quantitative discrète : modalité dont la fréquence (absolue ou relative) est la plus élevée. Dans le cas où une variable continue a été regroupée en classes, le mode est la classe dont la fréquence est la plus élevée.

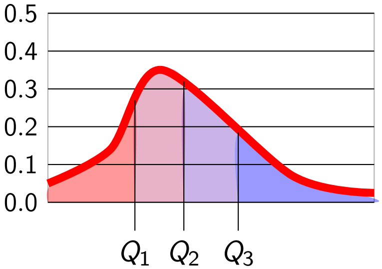


Dans l'exemple ci-dessus, le mode de la variable discrète est 2, celui de la variable continue, 1.9.

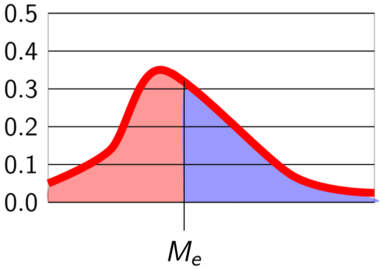
Les quantiles : séparer une distribution en parts égales

Lorsque la variable est ordonnée, si elle est continue, et parfois même quand elle est discrète ordonnée, on cherche à représenter les différentes parties d'une distribution. On nomme *quantiles* les valeurs qui permettent de séparer la distribution en parts égales. L'opération varie avec le nombre de parts.

Dans le cas d'une séparation en quatre, les *quartiles* sont les valeurs qui partagent la distibution en 4 parties de 25%.



Dans le cas d'une séparation en deux, la *médiane* est la valeur qui partagent la distibution en 2.



Le quantile, défini pour les variable ordonnées

Definition

les quantiles sont les valeurs de la variable partageant la série classée par ordre croissant de la variable en k sous-ensembles égaux.

- $k = 2$ c'est la *médiane* M_e
- $k = 4$ c'est les *quartiles* Q_1, Q_2, Q_3
- $k = 10$ c'est les *deciles* $D_1, D_2, \ldots, D_9$
- $k = 100$ c'est les *centiles* $C_1, C_2, \ldots, C_{99}$

Calcul du $n^{\text{ième}}$ quantile ($n < k$)

- Classer les données en ordre croissant, et calculer les fréquences cumulées $F(x)$
- Si $\exists x_i \ / \ F(x_i) = n/k$: le $n^{\text{ième}}$ quantile est x_i.
- Si $\exists x_{i-1}, x_i \ / \ F(x_{i-1}) < n/k < F(x_i)$: le $n^{\text{ième}}$ quantile est x_i. On peut parfois considérer l'intervalle $]x_{i-1}, x_i]$ ou en faire la moyenne de x_{i-1}, x_i (dans le cas de la médiane, on parle d'intervalle médian).

Exemple

Modalité	Effectifs	Fréquences	Fréq. cumulées	Qi
2	1	0.1	0.1	
3	3	0.3	0.4	0.25
4	4	0.4	0.8	0.5 ; 0.75
6	2	0.2	1	
Total	10	1		

  Dans la pratique, il faut trouver les modalités dont la fréquence cumulée est "juste au-dessus" de 0.25, 0.5, 0.75

- Prouver dans l'exemple suivant que le nombre d'enfants median est 2

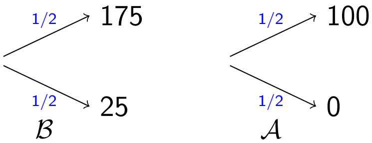
nb enfants	0	1	2	3	+ de 3
Effectifs	2	1	4	2	1

2

Evaluations du risque

Comparaisons - FSD

Certaines comparaisons admises par tous sont *robustes*. Ainsi, on préfèrera la loterie $\mathcal{B}$ à la loterie $\mathcal{A}$ si l'utilité des agents est croissante avec la richesse dans chaque état de la nature.



Définition : On dira qu'une distribution domine une autre distribution suivant le critère de *dominance stochastique de premier ordre* si cette distribution rémunère plus tous les états de la nature.

cependant, ce critère est loin de permettre de classer toutes les loteries. Ainsi, il sera implossible d'établir suivant ce critère un ordre de préférence entre la loterie $\mathcal{B}$ et le revenu certain de 50.

Recherche d'un Critère de préférence

Pour comprendre le comportement d'un agent, et plus précisément les choix qu'il fait lorsqu'il doit choisir entre plusieurs loteries $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on essaye d'établir un *critère de notation* des différentes loteries.

Selon quels types de critères les agents économiques classent-ils les loteries ?

Critère Moyenne - Variance

- Critère lexicographique
- Une plus grande espérance de revenu satisfait l'agent
- Une moins grande variance de revenu satisfait l'agent

$$U(\tilde{X}) = E(\tilde{X}) - \frac{\beta}{\alpha} V(\tilde{X})$$

Espérance d'utilité

Définition

Plutôt que de prendre l'espérance de la lotterie, tout se passe comme si l'agent appréciait les différents revenus à travers un filtre. Ainsi, l'agent voit le revenu x à travers son utilité ressentie $u(x)$. *Son critère d'évaluation est l'espérance de ces utilités.*

$$U\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array}\right) = \frac{1}{3}\ u(x) + \frac{1}{2}\ u(y) + \frac{1}{6}\ u(z)$$

(EU suite) Utilité marginale décroissante pour la richesse

En général, on estime que la fonction $u(x)$ Von Neumann Morgerstern est concave.

Cette fonction d'utilité VNM permet de représenter ce que l'on observe souvent à travers les choix des agents, à savoir *l'utilité marginale décroissante pour la richesse*

x	$u(x) = \sqrt{x}$	$u(x) = \ln(x)$
100	10	2,30
1000	31,63	4,60
10.000	100	6,91
100.000	316,23	9,21
10^6	1000	11,51

Un accroissement de richesse génère un accroissement d'utilité qui est en relation inverse de la richesse déjà accumulée.

Equivalent Certain

Définition : On appelle équivalent certain d'une loterie, la somme d'argent détenue de manière certaine qui donne la même utilité que la loterie

Il est à noter que ce l'équivalent certain définit un critère universel de classement des loteries. Mais là encore, connaître l'équivalent certain donne moins d'information que la connaissance de la distribution elle-même.

2 remarques :

- L'équivalent certain d'une loterie peut-être calculé quand on connait la forme des préférences d'un individu.
- Les paramètres des préférences d'un individu donné peuvent êtres calculés quand on connait l'équivalent certain de quelques loteries pour cet individu.

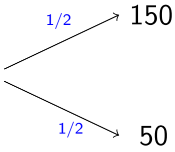
Prime pour le risque

Cette fonction d'utilité VNM permet de mesurer ce que l'agent est prêt à payer pour échapper au risque. Ce que l'on appelle la *prime de risque*, c'est à dire la différence entre le gain espéré, et l'équivalent certain (ou monétaire) de la lotterie.

$$\pi = E(L) - EC$$

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie



- Sa richesse espérée est 100
- Son utilité est $\frac{1}{2}\ ln(150) + \frac{1}{2}\ ln(50) = 4,661$
- Or $4,661 = \ln(76,6)$
- Sa prime de risque est donc $100 - 76,6 = 13,4$.

Que se passe t'il quand le risque est petit ?

Que signifie un petit risque ou plus communément *valeur connue à quelque perturbation près* ? Il s'agit de situations où une variable future n'a pas une réalisation x connue de manière sûre, mais une valeur $x + \tilde{\varepsilon}$ où $\tilde{\varepsilon}$ est une petite perturbation autour de x. En toute logique, on représente cette situation avec $\tilde{\varepsilon}$ dont la moyenne est nulle et où les réalisation de $\tilde{\varepsilon}$ sont petites.

Définition Un bruit *blanc* est une variable aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ dont la moyenne est nulle ($E(\tilde{\varepsilon}) = 0$) et dont les réalisations sont faibles en regard de la valeur (de position) x.

Prime pour le risque quand le risque est petit

Il est possible de faire une approximation de la prime pour le risque quand le risque est petit.

Proposition La prime de risque associé à un bruit blanc $\tilde{\varepsilon}$ de variance σ^2, lorsque la valeur principale (ou moyenne) est x peut être approximée par $\eta = \frac{1}{2}A(x)\sigma^2$, où $A(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ désigne le coefficient d'aversion absolue pour le risque.

- Remarquer que selon cette formule le calcul de la prime de risque est simple : <u>la prime est linéaire avec la variance du risque</u>
- Remarquer que plus $A(x)$ est grand, plus la prime de risque est élevée
- Remarquer enfin que $A(x)$ dépend de la dérivée seconde de la VNM, cad de la curvature de la VNM : plus la fonction est concave, (plus elle aplatit les haut revenus), plus la prime de risque est élevée

Approximation de la prime de risque quand le risque est petit (PREUVE de la proposition précédente)

Nous allons faire des approximations de l'utilité d'un agent exposé au risque "autour de x"

(1) ▶ Si η est la prime de risque : $u(x-\eta) \approx u(x) - \eta\ u'(x)$

(2) ▶ Pour toute réalisation de $\varepsilon = u(x+\varepsilon) \approx u(x)+\varepsilon u'(x) - \frac{1}{2}(\varepsilon)^2 u''(x)$

(3) ▶ En moyenne donc : $E[u(x+\varepsilon)] \approx u(x) + E[\varepsilon]u'(x) - \frac{1}{2}E[(\varepsilon)^2]u''(x) = u(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x)$

et donc, si on égalise l'équation (1) et l'équation (3) on trouve :

(4) ▶
$$\eta = \frac{1}{2}\frac{-u''(x)}{u'(x)}\sigma^2$$

Degré d'aversion au risque

Vous disposez d'une richesse de 100 et faites face au risque de gagner ou perdre 50 avec égale probabilité. Soit π ce que vous êtes prêt à payer pour échapper au risque.

Degré d'AR	π
0	00.0
1	13.4
4	37.8
10	46.0

Décrire les positions risquées que vous avez si vous contractez une assurance au prix de la prime de risque.

Coefficient d'aversion absolue pour le risque

Comme il a été défini plus haut, l'AVERSION ABSOLUE POUR LE RISQUE au sens de ARROW-PRATT est un coefficient qui dépend de l'ordre de grandeur du risque que l'on subit. Il se définit comme :

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$$

- Remarquer que ce coefficient est POSITIF quand la fonction $u(\cdot)$ est concave
- Remarquer que ce coefficient varie avec x : cela signifie que quand la richesse varie, le comportement face au risque varie.
- Dans les exemples standards, on verra que $A(x)$ est décroissante avec x : plus les agents sont riches, moins ils sont averses au risque.

Aversion décroissante avec la richesse

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie

$$\begin{tikzcd} & 150 \\ {} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\ & 50 \end{tikzcd}$$

Comment votre prime de risque évolue si votre richesse initiale est de 1000 ?

Comment votre prime de risque liée au risque de gagner ou perdre 50 avec égales probabilités évolue si votre richesse passe de 100 à 1000 ?

Il est communément accepté que celle-ci décroît.

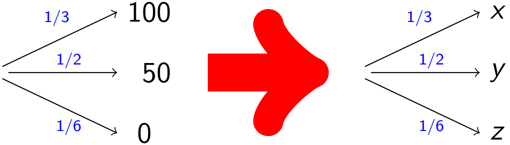
Partage du risque quand il y a un agent neutre au risque dans l'économie

THEOREME : Quand il y a un agent neutre au risque dans l'économie, il prend tout le risque de l'économie, et il permet à tous les autres agents d'échanger leur risque contre une distribution certaine.

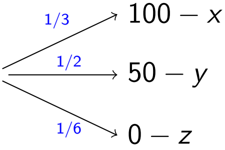
Tout se passe comme si l'agent neutre au risque jouait le rôle d'un assureur dans l'économie, comme développé dans les transparents suivants.

Partage du risque entre assureur et assuré

Le modèle standard d'assurance représente le partage de risque entre un assureur neutre au risque et un assuré, exposé au risque et averse au risque.



Bilan des assureurs



Tout se passe comme si l'assureur prenait à son compte la *dotation* de l'agent et qu'il donnait en retour la lotterie finale (ce qui est reçu dans chaque état de la nature) à l'agent.

Les points de vue de l'assureur et de l'assuré

L'assuré averse au risque, a un **critère**,

$$U\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} 100 \\ \xrightarrow{1/2} 50 \\ \xrightarrow{1/6} 0 \end{array}\right) \leq U\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array}\right)$$

il accepte l'échange s'il en obtient une plus grande utilité

Les assureurs neutres au risque définissent la **faisabilité**,

$$0 \leq E\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} 100 - x \\ \xrightarrow{1/2} 50 - y \\ \xrightarrow{1/6} -z \end{array}\right)$$

ils acceptent l'échange si l'espérance de leur bilan n'est pas négative

Le contrat optimal d'assurance

Définition

Le contrat optimal, c'est la lotterie (x, y, z) qui donne la plus grande satisfaction aux assurés, tout en respectant les critères de faisabilité de l'assureur.

Faisabilité

L'espérance de revenu de la lotterie obtenue doit être moindre que l'espérance de revenu de la lotterie que l'agent abandonne.

$$\frac{1}{3}\ x + \frac{1}{2}\ y + \frac{1}{6}\ z \leq \frac{1}{3}\ 100 + \frac{1}{2}\ 50 + \frac{1}{6}\ 0 = 48,33$$

Satisfaction de l'agent

Quelle que soit la lotterie, Il lui préfère toujours son espérance. (JENSEN)

$$\frac{1}{3}\ u(x) + \frac{1}{2}\ u(y) + \frac{1}{6}\ u(z) \leq u(\frac{1}{3}\ x + \frac{1}{2}\ y + \frac{1}{6}\ z)$$

On propose à l'agent le revenu certain $x = y = z = 48,33$

Assurance optimale

On parle alors d'*assurance pure et parfaite* dès lors que l'agent obtient le même revenu dans tous les états de la nature à un prix actuariellement juste.

Remarquez qu'un contrat d'assurance pure et parfaite

1. implique qu'il n'y a pas de franchise ;
2. est actuariellement juste : la moyenne de ce qui est obtenu est la moyenne de la lotterie auquel l'agent était exposé ;
3. bénéficie *positivement* à ce dernier, qui était prédisposé à payer une prime de risque pour se débarrasser de son exposition au risque.