# Maths et stats en Gestion

## Chapitre I
## Les Nombres

où l'on présente les nombres habituellement utilisés en Éco et en Gestion

# Les nombres

On connaît les nombres, depuis l'enfance, depuis la nuit des temps,

- en comptant les entiers naturels, les uns après les autres et par des séquences d'addition et de multiplication
- en représentant des fractions de l'unité, et de n'importe quel nombre
- en calculant des racines, des puissances, des logarithmes, ou plus généralement le résultat d'une fonction réelle.

L'étudiant, à l'issue de sa formation, sait reconnaître les nombres, il sait aussi *compter*. En particulier, il connaît les tables de multiplication, il maîtrise l'usage d'un *tableur*, et des fonctions usuelles, somme, puissance, logarithme.

## Catégories de nombres

- Les nombres se regroupent en plusieurs catégories, que vous devez connaître : les entiers naturels, les fractions, les décimaux et les réels :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- Mais ces différents types de nombres sont apparus à différents moments de l'histoire humaine, et ont des usages différents, c'est ce que nous allons découvrir dans la suite du chapitre.

# Les nombres entiers (système français)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Un | Dix | Cent | Mille | Million | Milliard | (Billion) | Trillion |
| $10^0$ | $10^1$ | $10^2$ | $10^3$ | $10^6$ | $10^9$ | $10^{12}$ | $10^{18}$ |
| | | | | Méga | Giga | Tera | |

1 million, c'est ?
- 1.000.000
- 1.000.000.000
- 1.000.000,000

1.000.000.000, c'est ?
- mille milliers
- mille fois cent
- un millième de billion

| Doigts de la main<br>population mondiale<br>nb. tuiles de 30*20, sur un toit de 2*75 $m^2$<br>Population fourmilière<br>PIB Mondial<br>Age de l'univers (en s)<br>Myriade | $\Longrightarrow$ | Dizaine<br>Centaine<br>Milliers<br>Million<br>Milliard<br>Billion<br>Trillion |
|---|---|---|

## réponses

le PIB mondial : Le PIB mondial est estimé à 79 865 milliards de dollars américains en 2017 par le Fonds monétaire international.

colonies de fourmis : quelques dizaines à plusieurs millions d'individus.

L'âge de l'Univers représente la durée écoulée depuis le Big Bang, c'est-à-dire la phase dense et chaude de l'histoire de l'univers. Ce terme ne préjuge pas que l'univers soit d'un âge fini, son état antérieur au Big Bang (s'il existe) étant à l'heure actuelle hors de portée de l'observation directe.
L'âge de l'Univers peut s'évaluer par plusieurs méthodes plus ou moins directes, qui convergent toutes vers une valeur de l'ordre de 14 milliards d'années.

Une myriade (mot d'origine grecque) signifie dans le système décimal dix à la puissance quatre, soit dix mille (10 000).

- Le grec moderne utilise couramment ce numéral. Un million en langue grecque se dit même εκατομμύριο (ekatommyrio), cent myriades.
- Beaucoup de cultures asiatiques comptent traditionnellement en myriades. Par exemple, les chinois utilisent un carcatère caractère 萬 (ou 万 en chinois simplifié) pour signifier « dix mille » depuis des millénaires. Les coréens ainsi que les japonais ont aussi emprunté ce caractère dans leurs langues.

# Addition et multiplication

**“Le compte est bon”** : en partant de 6 nombres (tirés au hasard dans l’ensemble $\{1, 2, ..., 9, 10, 25, 50, 75, 10\}$), chercher à s’approcher le plus près possible d’un nombre cible compris entre 100 et 999.

- Nombres tirés : 3, 100, 8, 8, 10, 6 Cible : 683
- Nombres tirés : 3, 75, 2, 4, 1, 1 Cible : 888

**Tables de multiplication** : repasser les table de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

**Multiplications rapides** : s’entrainer sur des multiplications par 11

**Ordre dans lequel se déroulent les opérations** :
$(a + b)c = (a + b) * c$ : on fait d’abord l’addition $a + b$ et on multiplie par $c$
$ac + bc = a * c + b * c$ : on calcule deux produits $ac$ et $bc$, que l’on additionne
À savoir,

$$(a + b)c = ac + bc.$$

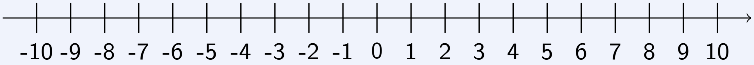
# Multiplication japonaise

https://www.youtube.com/watch?v=85Vd0NpL32k&feature=youtu.

# Entiers relatifs (parfois dits entiers rationnels)

## Définition

On désigne par entier relatif, tout entier naturel positif, auquel on a adjoint un signe positif ou négatif indiquant sa position par rapport à 0.




- Ces nombres permettent d'exprimer la différence de deux entiers naturels quelconques.
- La première allusion à des nombres négatifs apparaît dans des textes indiens comme l'Arybhatiya du mathématicien indien Âryabhata (476-550) où sont définies les règles d'additions et de soustractions. Les nombres négatifs apparaissent alors comme représentant des dettes et les nombres positifs comme des recettes.

# Développement et factorisation

## Distributivité de la multiplication sur l'addition

On appelle *développement* le fait de transformer des expressions algébriques de type produit en somme.
On appelle *factorisation* le fait de transformer des expressions algébriques de type somme en produit.

$$a \times (b + c) \quad \underset{\xrightarrow[\text{développement}]{}}{\overset{\xleftarrow{\text{factorisation}}}{=}} \quad a \times b + a \times c$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

# Les décimaux

## Définition

Un nombre décimal est un nombre possédant un développement décimal limité, c'est-à-dire un nombre qui s'écrit avec une quantité quelconque, mais finie, de chiffres à droite de la virgule

- les décimaux sont utilisés pour compter les valeurs monétaires

  *Usuellement, en euros, on admet deux décimales (pour compter les centimes), mais dans certain cas, on trouve plus de décimales (Exemple, le 6 sept. 2018, un Prix moyen du GNR ordinaire reporté sur internet est de 0,963 €/LITRE). On l'observe quand il s'agit de donner un prix unitaire, et que l'unité est petite par rapport au volume concerné.*

- les nombres décimaux sont utilisés pour les mesures, des quantités, et plus généralement, des variables physiques telles, par exemple la vitesse et l'energie.

# Décimaux et pourcentages

▶ Définition Un *pourcentage* est une façon d'exprimer le *rapport* ou proportion des effectifs de deux ensembles au moyen d'une fraction de cent. Généralement, ce nombre est suivi du signe % ou /100, parfois l'abréviation p.c., ou rarement en écrivant en toutes lettres pour cent : 5 %, 5 p.c., 5 pour cent.

## Proposition

Tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de pourcentage.

Écrire sous forme de pourcentage les nombres suivants

$$1 \qquad 0,5 \qquad 0,33 \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{12}{100} \qquad \frac{56}{400} \qquad 0,2374$$

Écrire sous forme décimale (et/ou de fraction) les pourcentages suivants

$$25\% \qquad 73,18\% \qquad 137\% \qquad 10\% \qquad 40\% \qquad 1\%$$

<u>Ne pas hésiter à utiliser le signe =.</u> On *doit* écrire $50\% = 0,5$ et $50\% = 1/2$

# Les Rationnels ou Fractions

## Définition

On appelle nombre rationnel tout nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs. Les nombres rationnels sont souvent notés $\frac{a}{b}$, où $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs (avec b non nul).
On appelle $a$ le *numérateur* et $b$ le *dénominateur*.

- Chaque nombre rationnel peut s'écrire d'une infinité de manières différentes, par exemple $1/2 = 2/4 = 3/6$, etc...

- Le développement décimal d'un nombre rationnel est toujours périodique au bout d'une certaine décimale. Réciproquement, tout nb qui possède un développement décimal périodique est un nombre rationnel.

- Tout nombre rationnel positif peut s'exprimer comme somme d'inverses distincts d'entiers naturels. Par exemple, on a : $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21}$.

# Arithmétique des rationnels

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

i) Donner le résultat de la division de deux fractions :

$\left(\frac{a}{b}\right) / \left(\frac{c}{d}\right)$

ii) Un entrepreneur vend 30 % de son Entreprise
dont la valeur avait augmenté de 30%
de combien (en %) a varié son capital ?

# Comparaison de Fractions

Il arrive parfois qu'on doive par exemple comparer deux fractions, et avoir une réponse rapide, sans nécessairement connaître la valeur de ces deux fractions. Par exemple, on voudrait pouvoir

| | |
|---|---|
| $\frac{4}{7} < \frac{4}{3}$ | dans le premier cas, on multiplie numérateur et dénominateur de la seconde fraction par deux, pour comparer plus aisément deux fractions de 4. |
| $\frac{7}{4} > \frac{6}{4}$ | dans le second cas cas, on multiplie numérateur et dénominateur de la seconde fraction par deux, pour comparer plus aisément deux numérateurs différents divisé par 4. |
| $4 * 12 > 5 * 7$ | dans le troisième cas on opère un produit en croix qui indique sans ambiguïté la fraction la plus élevée |

- Les deux relations d'ordre suivantes sont toujours équivalentes :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > bc$$

# Ordre de grandeur des fractions

**Une fraction est :**

| | |
|---|---|
| **Proportionnelle au numérateur** | La fraction $\dfrac{a}{b}$ est d'autant plus grande que $b$ est grand, et d'autant plus petite que $b$ est petit |
| **Inversement proportionnelle au dénominateur** | La fraction $\dfrac{a}{b}$ est d'autant plus petite que $b$ est grand, et d'autant plus grande que $b$ est petit |

▶ En particulier, $1/x$ est très petit quand $x$ est grand. $1/x$ est très grand quand $x$ est petit.

# Fractions et Décimaux

- Un nombre décimal est toujours le résultat de la division d'un entier naturel par une des puissances de 10, cad par 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000, 1.000.000, ou toute autre puisssance supérieure. Il s'ensuit qu'un décimal est toujours une fraction.

Pour les décimaux suivants, les mettre sous la forme $\frac{n}{10^a}$

$5,6784$ $3/4$ $12/3$ $2/3$ $1/8$ $5,67840$

*Une fraction n'est pas nécessairement un décimal*

*par exemple, 1/3 n'est pas un décimal, car le nombre de chiffres après la virgule, dans 1/3, serait infini*

# Nombres réels

## Définitions

D1 : Les réels sont l'ensemble de tous les nombres qui permettent de faire les calculs usuels.
D2 : Tout nombre réel peut être représentée par une *partie entière* et une liste finie ou infinie de décimales.

- Attention, il y a parfois plusieurs représentations, par ex. $1 = 0,9999...$
- Les solutions des problèmes d'économie, de physique, de géométrie usuels ne sont pas toujours des rationnels, d'où la nécessité de s'intéresser au plus grand ensemble qui remplit de façon continue une droite.

> *Par exemple, $\sqrt{2}$ est la proportion de la Longueur sur la largeur dans les feuilles que vous utilisez habituellement (A4). En effet, le format des feuilles (A1), (A2), (A3), (A4), (A5) est tel que une feuille coupée en deux produit deux feuilles, plus petites, mais semblables à l'original.*
> *Ecrire la relation entre la longueur $L$ et la largeur $\ell$ d'une feuille (A4)*

# Puissance et Racine n$^{\text{ième}}$, Puissances

## Définition

La puissance n$^{\text{ième}}$ d'un nombre $a$, notée $a^n$ est le produit

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

La racine n$^{\text{ième}}$ de $a$, notée $a^{\frac{1}{n}}$ est le nombre réel $b$ tel que

$$b^n = a$$

On parle aussi de "puissance $1/n$"

Plus généralement, $a^{xy} = (a^x)^y$, $a^{x/y} = (a^x)^{1/y}$

Pas de simplification en général de $a^x b^y$, sauf :

$a^x a^y = a^{(x+y)}$

$a^x b^x = (ab)^x$

# Le nombre $e$ et la fonction exponentielle

Le nombre exponentiel, noté $e$ est une constante, très fréquemment utilisée en statistique, d'où son importance à connaître en gestion.

**Définition**

Le nombre exponentielle est la limite de la série additionnant les inverses des factoriels des entiers naturels

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots$$

où le factoriel de $n$ est le nombre $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdot n$

- la fonction exponentielle est la fonction des puissances du nombre exponentiel. C'est une fonction que l'on rencontre très souvent en gestion.

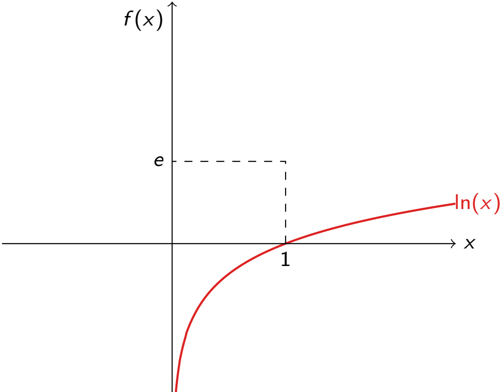
exponentielle de $x$ : $e^x$

# La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme est l'inverse de la fonction exponentielle.

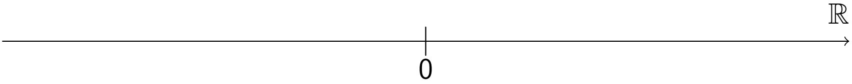
## Définition

Le logarithme népérien est la puissance à laquelle il faut élever le nombre exponentiel $e$ pour obtenir ce nombre. On note ce nombre $\ln(x)$. On a donc formellement $e^{(\ln(x))} = x$.



# Ordre sur les nombres

L'ensemble $\mathbb{R}$ est ordonné.
C'est la raison pour laquelle on le représente souvent par une droite ordonnée (la flèche indiquant le sens dans lequel les nombres sont ordonnés).




Plus précisément, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre complet, c'est à dire que quels que soient deux nombres que l'on choisit, on peut toujours les ordonner. On traduit cela par la phrase mathématique

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad : \quad \text{soit} \quad x \geq y, \qquad \text{soit} \quad y \geq x.$$

Fin du Chapitre 1