Maths et stats en Gestion

Chapitre II
Les ensembles de nombres

où l'on présente les ensembles de nombres, quelques propriétés générales simples et, plus particulièrement, leurs représentations graphiques, souvent utilisés en Éco et en Gestion

Les ensembles

On définit des ensembles soit à travers des équations, ou des propriétés de leurs élements, soit à partir d'opérations sur les ensembles.

- Un ensemble défini par les propriétés de ses éléments : Il s'agit le plus souvent de sous ensemble d'un ensemble défini par des conditions que doivent satisfaire ses éléments.

- Un ensemble défini par des opérations sur plusieurs ensembles : On part de plusieurs ensembles d'un même sous ensemble, et des opérations définissent un autre ensemble.

Opérations sur les ensembles

Trois opérations

Union	$\cup$	$A \cup B$ est l'ensemble qui contient à la fois les éléments de A et les éléments de B
Intersection	$\cap$	$A \cap B$ est l'ensemble qui contient des éléments qui sont à la fois éléments de A et éléments de B
Produit	$\times$	$A \times B$ est un nouvel ensemble qui contient des listes d'éléments dont le premier appartient à A et le second à B.

- formellement,

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ or } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ and } x \in B\}$$
$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ and } b \in B\}$$

Plan du cours

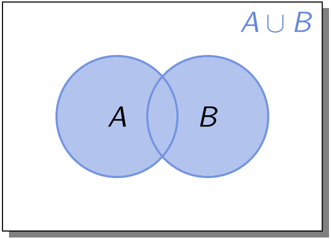
1. Union, Intersection, Produits d'ensembles
2. Sous-ensembles définis par équations ou inéquations

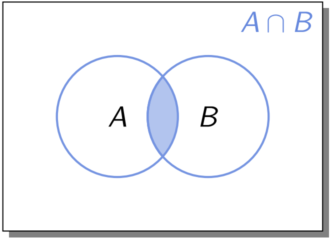
    - en particulier les droites et les surfaces anguleuses

3. Ouverts et Fermés
4. Convexité

1. Ensembles définis par une combinaison d'ensembles

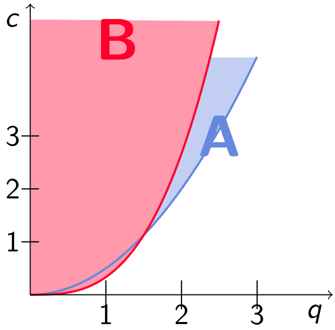
Union ou Intersection de deux ensembles





- Notez que l'union de deux ensembles n'a de sens que si seulement les deux ensembles dont l'on part sont eux même contenus dans un ensemble plus gros.

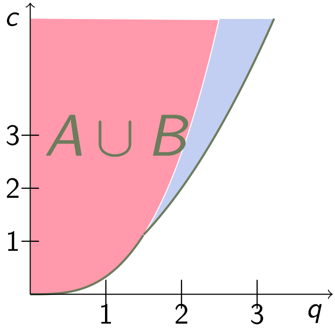
- Un entrepreneur a la possibilité de reprendre une entreprise A dont la fonction de coût est $C_A(q) = \frac{1}{2}q^2$ OU une entreprise B dont la fonction de coût est $C_B(q) = \frac{1}{3}q^3$ (pas les deux ensemble). On note $A = \{(q,c)\ c \geq \frac{1}{2}q^2\}$ les possibilités de production avec l'usine A et $B = \{(q,c)\ c \geq \frac{1}{3}q^3\}$ les possibilités de production avec l'usine B. En disposant toujours de l'entreprise la plus avantageuse, étant donné les conditions du marché, *cet entrepreneur dispose-t'il de $A \cap B$ ou de $A \cup B$?*



Tout point de A représente un plan de production dans l'usine A Tout point de B

représente un plan de production dans l'usine B

Notez (et c'est l'utilité principale de ce graphique) que certains plans de production sont disponibles dans les deux usines, alors que d'autres sont spécifiques à l'usine A et à l'usine B,. [ce qui est une étape intermédiaire pour répondre à la question posée]



Si l'entrepreneur a le choix d'utiliser l'une ou l'autre usine, il peut choisir soit dans A soit dans B, C-a-d dans $A \cup B$.

Exemples à traiter

1) Soit les ensembles A et B suivants inclus dans $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{0 \leq x + y \leq 4\} \quad B = \{0 \leq x - y \leq 4\}$$

Représenter A et B dans $\mathbb{R}^2$, puis représenter $A \cap B$ et $A \cup B$ en indiquant leur nature particulière.

2) Même exercice pour les ensembles A et B suivants

$$A = \{0 \leq x + y \leq 4\} \quad B = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Produit de deux ou plus d'ensembles

Les exemples usuels en Gestion de produits d'ensemble sont le produit des ensembles de nombres. Pour tout ces exemples, il existe la notation conventionnelle usuelle suivante :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2 \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Le produit peut être effectué un nombre fini de fois, différent de 2. Par exemple

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad / \quad x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

- On peut aussi définir $\mathbb{R}^n$ ainsi :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad / \quad x_i \in \mathbb{R}, \text{ pour } i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Usage intense des ensembles produits en Gestion

En Gestion, il arrive très fréquemment de considérer le lien entre plusieurs variables, comme par exemple, dans le cas de la production où l'on s'intéresse au lien entre le prix de vente p et la quantité produite q.

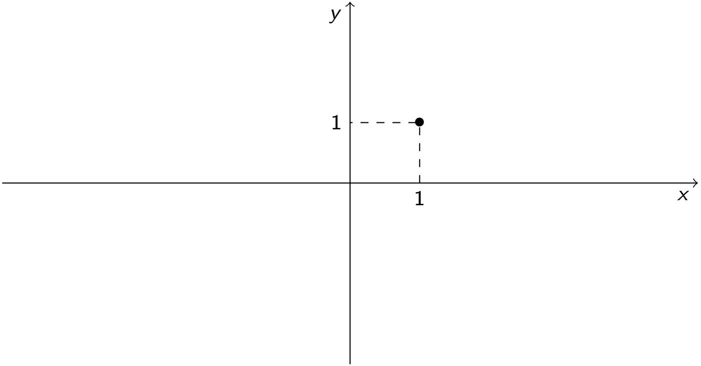
Typiquement, on considérera alors des couples (p, q), et, puisque ce sont différentes valeurs de ce couple qui nous intéressent, on étudiera ces couples à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^2$, le $+$ signifiant que l'on ne considère que des valeurs de p et de q positives ou nulles.

$$\begin{array}{rcl} (2,1) & : & \text{Vendre une unité au prix unitaire de 2} \\ (1,3) & : & \text{Vendre 3 unités au prix unitaire de 1} \\ (p,q) & : & \text{Vendre } q \text{ unités au prix unitaire de } p \end{array}$$

Représentation du Produit de deux ensembles

Dans le cas de deux ensembles on utilise des diagrammes à deux dimensions pour représenter leur produit. C'est le cas en particulier de $\mathbb{R}^2$.

- Un élément de $\mathbb{R}^2$ est représentée par un point dans le diagramme à deux dimensions. Ici par exemple l'élément $(1, 1)$:



Arithmétique dans l'ensemble produit (cas $\mathbb{R}^2$)

Addition $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplication scalaire $\lambda \times (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$

Exercices

i) Simplifier l'expression :

$2(p, q) - (p/2, 5q + 1)$

ii) Combien doit-on ajouter à $(1, 1)$
pour obtenir $(2, 0)$
Représenter cette opération dans $\mathbb{R}$

2. Ensembles définis par une équation

Sous-ensembles définis par une équation

Une équation ou une inéquation vise à représenter un sous ensemble d'un ensemble.

Dans la pratique, on étudiera des sous ensembles de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ ou de de $\mathbb{R}^n$.

▶ Dans la pratique, il est demandé aux étudiants de <u>très bien maîtriser</u> ce qui concerne les représentations de ces sous-ensembles, en particulier, des *droites* et aussi des *surfaces élémentaires* dans le Plan.

Sous-ensembles définis par une équation

Ce transparent donne des exemples élémentaires, qui seront développés et généralisés à l'envi en Gestion

Intervalle dans $\mathbb{R}$	$x \geq 0$ et $x \leq 1$, ce qu'on note encore $x \in [0,1]$
Droite dans $\mathbb{R}^2$	$3x_1 + x_2 = 7$
Boule dans $\mathbb{R}^2$	$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$
Secteur dans $\mathbb{R}^2$	$3x_1 + x_2 \leq 7$ et $3x_1 - x_2 \leq 5$ et $x_1 + x_2 \geq 1$

Exercices Représenter les quatre sous-ensembles précédents

Les droites dans $\mathbb{R}^2$

En géométrie, la droite désigne un objet géométrique formé de points alignés, elle est illimitée des deux côtés. Pour les Anciens, les droites, en mathématiques et surtout en géométrie, était un objet « allant de soi », si « évident » que l'on négligeait de préciser de quoi l'on parlait.

Trois Définitions

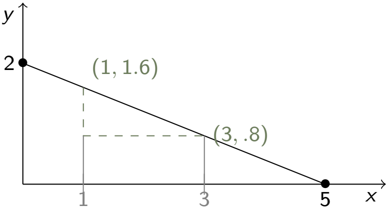
1. Si (x, y) désigne un élément du Plan, une droite désigne les points qui satisfont une relation linéaire entre x et y. Par exemple, $y - x = 1$
2. Une droite désigne les points qui sont alignés avec deux points particuliers. Par exemple, la droite qui passe par les points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$
3. Une droite désigne un ensemble passant par un point A, de pente p, c-a-d tous les points qui, connectés à A sont tels que la pente obtenue égale p. Par exemple la droite qui passe par le point $(-.5, .5)$ de pente positive égale à 1.

Représentation des droites dans $\mathbb{R}^2$

On s'inspire des définitions précédentes pour trouver les éléments remarquables qui permettront de tracer une droite,

- soit deux points , (il peut être astucieux de chercher les points qui coupent respectivement l'axe horizontal et l'axe vertical).
- soit un point et la pente de la droite

Par exemple, lorsqu'on veut représenter la droite $2x + 5y = 10$,
-1a- On recherche le point qui coupe l'axe horizontal. Il est défini par l'équation $2x = 10$, soit encore $x = 5$: dit autrement, La droite (D) passe par le point de coordonnées $(5, 0)$
-1b- On recherche le point qui coupe l'axe vertical. Il est défini par l'équation $5y = 10$, soit encore $y = 2$: dit autrement, La droite (D) passe par le point de coordonnées $(0, 2)$

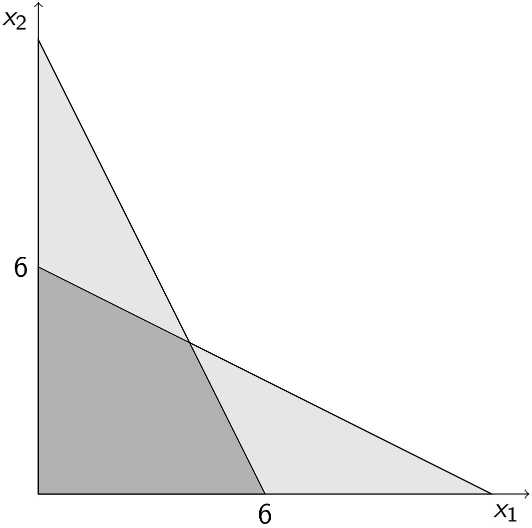


Ou -2- on cherche la pente de cette droite (ici $-2/5$) et on la trace à partir de n'importe quel point, par exemple à partir de $(1, 1.6)$.

Les secteurs définis par des droites dans $\mathbb{R}^2$

Considérons une entreprise fabriquant deux biens en quantités x_1 et x_2. Ces productions nécessitent l'utilisation de deux ateliers dont les capacités de production exprimées en heures d'usinage sont de 12. Supposons que :
- Chaque unité du premier bien nécessite 2 H d'usinage dans le premier atelier et 1H dans le second
- Chaque unité du second bien nécessite 1 H d'usinage dans le premier atelier et 2H dans le second

▶ Déterminer et représenter le domaine de production dans l'espace x_1, x_2, sous l'hypothèse que les deux ateliers fonctionnent à plein


x_2
6
6
x_1

3. Ensembles ouverts et fermés

Ensembles ouverts dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$

On s'intéresse aux intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$, aux boules ouvertes $\mathbb{R}$ (type $]0,1[\times]0,1[$) et plus généralement, à la généralisation de ces intervalles et boules, par la notion d'ouvert.

- On dit qu'une partie $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ est un ouvert si A si pour tout $x \in A$, il existe un *intervalle ouvert* de centre x contenu dans A.

et de façon similaire

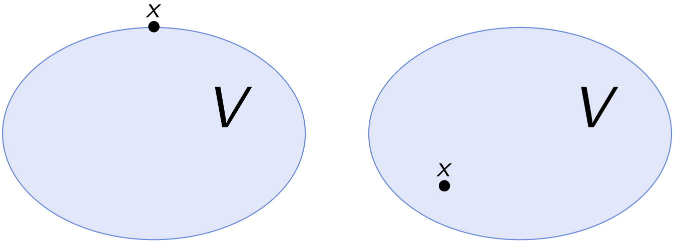
- On dit qu'une partie $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert si A si pour tout $x \in A$, il existe un *boule ouverte* de centre x contenu dans A.

Grosso modo, est ouvert tout ensemble qui ne contient aucun élément de "sa frontière".

Voisinages ouverts

Définition

On appelle voisinage ouvert d'un point x tout ouvert V qui contient x



V n'est pas un voisinage de x $\qquad$ V est un voisinage de x

Grosso modo, un voisinage, c'est un ensemble ouvert qui contient x

Propriétés des ensembles ouverts

Intersection finie Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert

Union infinie Toute union infinie d'ouverts est un ouvert

Exercices

(i) Dire que vaut $]0,1[\cap]0,\frac{1}{2}[\cap]0,\frac{1}{4}[\cap]0,\frac{1}{8}[\cap\ldots$

(ii) Est-ce que l'union des cercles de centre 0 et de rayo

avec $r\in]0,1[$ est un ouvert ?

(iii) Est-ce que $]1,3[$ est un voisinage ouvert de $\sqrt{2}$?

Ensembles fermés dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$

Définition

On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est fermé, si son complémentaire est ouvert.

Par exemple, sont dit fermés,

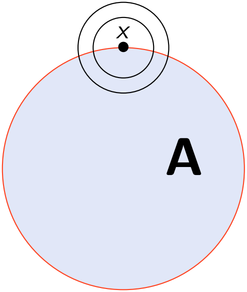
$$\begin{array}{llll} \text{dans } \mathbb{R} & : & [0,1] &]-\infty,3] & \mathbb{N} \\ \text{dans } \mathbb{R}^2 & : & [0,1]\times[0,1] & \text{une droite du Plan} & \{(p,q)/pq - c(q) \geq 0\} \end{array}$$

Grosso modo, est fermé tout ensemble qui contient tous les élément de sa frontière.

Frontière

Pour définir la frontière d'un ensemble, notion qui est assez intuitive, on est obligé de passer par la notion d'adhérence et d'intérieur.

- Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, on dit qu'un point x est *adhérent* à A si tout voisinage ouvert de x rencontre A
- L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'*adhérence* de A, noté $\bar{A}$.
- L'*intérieur* de A est le plus grand ouvert contenu dans A
- La *frontière* de A est $\bar{A} \backslash A$



Dans la figure ci-dessus, x est un point adhérent au disque coloré en bleu, le disque bleu est l'intérieur de A, La frontière est dessinée en rouge.

Fermés bornés

Définition

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit *fermé* et *borné*, s'il est fermé et s'il existe une boule de diamètre finie de $\mathbb{R}^2$ qui contient A.

- En pratique en Gestion, beaucoup d'ensembles considérés sont bornés. Par exemple, les capacités de production d'une firme.

- L'idée de fermé contient aussi l'idée de continuité. On parle par exemple d'un trait "continu" : c'est un fermé. En Gestion, lorsque l'on considère un ensemble de technologies réalisables, alors, la technologie "limite" est elle aussi réalisable.

À retenir ou pas :

- Toute suite décroissante de fermés bornés a une intersection non vide.

Suite de nombres ou de doublets dans un fermé borné

Deux raisons de s'intéresser aux ensembles fermés bornés :

(I) En Gestion, on s'intéresse principalement à des ensembles qui sont bornés et fermés. C'est déjà une *notion de géométrie*

(II) En sciences, plus généralement, les ensembles fermés bornés ont une propriété essentielle, *concernant les suites de nombres*

▶ Définition : On appelle suite de nombre dans B, est une famille d'éléments indexée par $1, 2, 3, \ldots$. Une telle suite $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ peut être finie ou infinie.

▶ Définition : On appelle sous-suite de la suite $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ la suite pour laquelle on n'a gardé que certains termes (une infinité qd même, quand la suite originale est infinie).

Théorème

Quelle que soit une suite de nombres appartenant à un ensemble fermé borné B,il est toujours possible de trouver une sous-suite convergente, c'est-à-dire une sous-suite de ces nombres qui converge vers une limite.

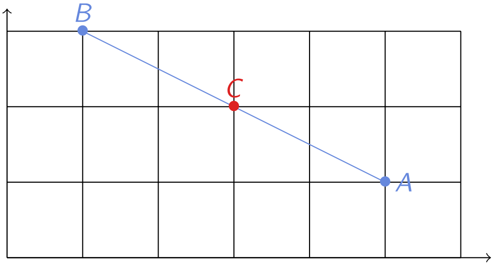
4. Ensembles convexes

Segments

Définition

On appelle *Segment* d'extrémités a et b dans $\mathbb{R}^2$ le segment de droite qui lie a à b. Formellement, c'est l'ensemble des points $\lambda a + (1 - \lambda)b$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

▶ Exemple : Le centre du segment $A(5,1)$-$B(1,3)$ est le point $C(3,2)$ appartenant au segment d'extrémités A et B, positionné à même distance de A et B.*on a alors :* $C = 0,5A + 0,5B = \dfrac{A+B}{2}$.



Appartenance à un Segment, interprétation, calcul

- Définition : le barycentre de deux points du plan A et B est le point obtenu comme la moyenne arithmétique des positions de chacun de ces points, auxquels on a éventuellement affecté des coefficients de pondération.

- L'ensemble des barycentres de deux points du plan A et B est exactement le segment A - B

- Souvent, pour passer d'un point (p, q) à un point (P, Q), plutôt que de tracer ces deux points, on définit la pente du chemin entre ces deux points, cad que l'on regarde la quantité
$$\frac{Q-q}{P-p}$$

- Ainsi, pour voir si un troisième point (p', q') est sur le segment entre (p, q) et (P, Q), on compare les deux pentes suivantes

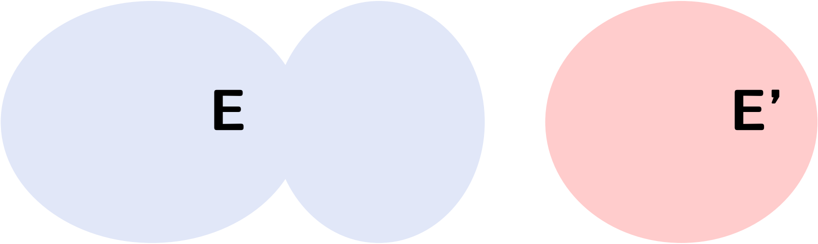
$$\frac{Q-q}{P-p} \qquad et \qquad \frac{Q-q'}{P-p'}$$

Ensemble convexe

Définition

Un objet géométrique est dit convexe lorsque, chaque fois qu'on y prend deux points A et B, le segment [A, B] qui les joint y est entièrement contenu.

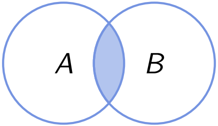
Grosso modo, un espace est convexe, quand il n'a pas sortie possible de l'ensemble, par un segment liant deux de ses éléments.



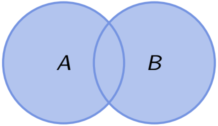
Exercice : Démontrer dans le Plan que le disque unité (cad $x^2 + y^2 \leq 1$) est convexe.

Propriétés des ensembles convexes

Intersection L'intersection de deux convexes est un convexe



Attention : L'union de deux convexes **n'est pas nécessairement** un convexe

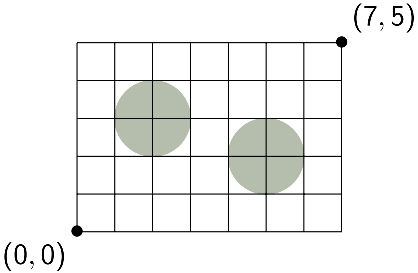


Ensembles convexes et droite

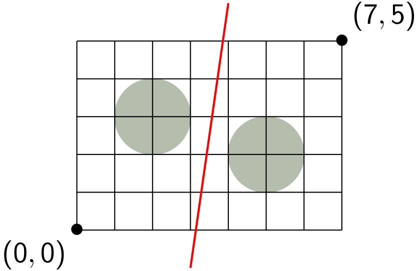
- Le résultat suivant peut paraître anecdotique, il est en fait l'un des résultats mathématiques les plus importants pour construire les équilibres en Economie / Gestio

Théorème de séparation

Si deux ensembles convexes sont disjoints, il existe toujours au moins une droite qui les sépare



Exercice : Trouver une droite qui sépare les deux surfaces convexes dessinées ci-dessus



Philosophie : Lorsque deux CONVEXES sont disjoints, on peut séparer l'espace en deux sous-espace ouverts, chacun des convexes étant strictement inclus dans son sous-espace ouvert respectif.

Fin du Chapitre 2