Maths et stats en Gestion

Chapitre III
Les équations, les inéquations avec une ou deux variables

où l'on présente, en complément du chapitre II, les méthodes de résolution des différents types d'équations linéaires et quadratiques, et aussi de système d'équations et des différents types d'inéquations, souvent utile en Éco et en Gestion.

Equation, inconnues et solutions

Une équation est, en mathématiques, une relation contenant une ou plusieurs variables. Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre la variable pour rendre l'égalité vraie. La variable est aussi appelée inconnue et les valeurs pour lesquelles l'égalité est vérifiée solutions.

Le rapport d'une variable à une équation qu'elle vérifie est double.

- L'équation, si elle caractérise complètement et uniquement la variable constitue une *définition implicite* de cette variable
- L'équation, lorsqu'elle peut être résolue de manière explicite, avec 1 solution, conduit à la *connaissance explicite* de la variable

▶ ; Toujours se souvenir que l'on peut analyser les propriétés d'une variable, soit en connaissant sa valeur explicite, soit, le plus souvent, par l'analyse directe de sa définition implicite.

Trois branches des mathématiques

- ; L'algèbre — l'algèbre étudie surtout deux familles d'équations : les équations polynomiales et parmi elles les équations linéaires. Les équations polynomiales sont de la forme $P(X) = 0$, où P est un polynôme. Des méthodes de transformation et de changement de variable permettent de venir à bout des plus simples.

- ; La géométrie — la géométrie utilise les équations pour caractériser des figures. L'objectif est encore différent des cas précédents, l'équation est utilisée pour mettre en évidence des propriétés géométriques.

- ; L'analyse — L'analyse étudie des équations du type $f(x) = 0$, où f est une fonction ayant certaines propriétés comme la continuité, la dérivabilité

Plan du cours

1) Résolution d'une équation d'une variable,
   - premier et second degrés
   - cas plus général

2) Résolution de une ou deux équations d'une ou deux variables

3) Ensembles définis par une ou plusieurs inéquations

1. Résolution d'une équation d'une variable

Equation d'une variable, deux cas particulier

Définition

On dit qu'une équation est d'une variable quand elle caractérise seulement une seule variable dans $\mathbb{R}$. On dit plus particulièrement que c'est une équation du premier degré (ou *linéaire*) quand c'est une équation de la forme

$$ax + b = c;$$

On dit que c'est une équation du second degré (ou *quadratique*) quand c'est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

▶ ; L'équation $4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ est bien une équation d'une variable, mais elle est d'un autre type, ni du premier degré, ni du second degré. Dans des cas comme cela, on pourra arriver à une définition explicite de x, ou non. Il faut alors analyser ces équations au "cas par cas".

Equation du premier degré

Principe

Pour résoudre une équation du premier degré, on transforme les membres de l'équation en appliquant les cinq opérations « classiques » (addition, multiplication, soustraction, division et extraction de racine) SIMULTANEMENT sur les deux côtés de l'équation, jusqu'à obtenir $x = \dots$. On procède alors par équivalence.

- ; **Exercice** Résoudre les équations suivantes :

$$2x - 1 = 0 \qquad 7x - 3 = 12 \qquad \frac{1}{2}x + 7 = 13x - 23 \qquad \frac{1}{1+3x} = \frac{5-2}{12x}$$

- ; **Exercice** Donner le cheminement pour arriver aux équivalences suivantes :

$$7x - 3 = 12 \iff 7x = 15 \qquad \frac{1}{1+3x} = \frac{5-2}{12x} \qquad 12x = 3 + 9x$$

Quelle est la solution de l'équation 7x=8x ?

Robert Surcouf, M.Sc. Ingénieurs
A répondu le 5 octobre

J'ai lancé mon meilleur algorithme de résolution symbolique il y a deux jours mais il tourne encore sur mon Cray XK7. Le résultat intermédiaire indique 0,00012 mais il semble osciller avec une valeur négative. Le programme moniteur a lancé une sous-routine de débouclage sur quelques co-processeurs, enfin, il reste un espoir d'obtenir la convergence avant la fin de l'année. Je vous tiens au courant.

Equation du second degré

Principe

Pour résoudre une équation du second degré, deux méthodes : la factorisation ou la méthode du trinôme

- ; Factorisation On transforme l'équation jusqu'à obtenir une forme du type $(x-k)(x-l)=0$. Les deux solutions sont alors k et l
- ; Méthode du discriminant on transforme les membres de l'équation jusqu'à obtenir une forme du type $ax^2+bx+c=0$ (dite *trinôme*), puis on calcule les solutions en fonction du discriminant $x_i = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, quand $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

▶ ; **Remarque** Quand le discriminant est négatif ($\Delta < 0$) l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Aussi, on prend souvent l'habitude quand on a une équation du second degré de calculer d'abord le discriminant

Enoncé : équations du second degré

Calculer, *si elles existent*, les solutions des équations suivantes :

$x^2+5x-6=0$ $\quad$ $9x^2-6x+1=0$ $\quad$ $-10x^2+100x+1000=0$

Factoriser, *si cela est possible*, les trinômes suivants :

x^2+5x-6 $\quad$ $9x^2-6x+1$ $\quad$ x^2-1 $\quad$ x^2+1

Résolutions des équations du second degré

▶ ; $x^2 + 5x - 6 = 0$ Le discriminant est $\Delta = 25 - 4 * (-6) = 49 > 0$: il y a deux racines. Sachant que $\sqrt{\Delta} = 7$, on trouve $S = \{-6; 1\}$.

▶ ; $9x^2 - 6x + 1 = 0$ Le discriminant est $\Delta = 36 - 4 * 9 = 0$. L'équation admet deux solutions confondues : $S = \frac{1}{3}$

▶ ; $-10x^2 + 100x + 1000 = 0$ Le discriminant est $\Delta = 10.000 + 4 * 10 * 1000 = 50.000 > 0$. $\sqrt{50000} \approx 223,6$, on trouve $x = \dfrac{-100 \pm 223,6}{-20} = 5 \pm 11,18$, soit $S = \{16,18; -6,18\}$

▶ ; $x^2 - 1 = 0$ Ici, la factorisation donne tout de suite la solution. En effet, en utilisant les identités remarquables on trouve $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. L'équation est donc $(x-1)(x+1) = 0$ dont les deux solutions sont 1 ou -1 : $S = \{-1; 1\}$

▶ ; $x^2 + 1 = 0$ Ici, il est immédiat que cette équation n'a pas de solution. En effet, l'expression x^2+1 est la somme de deux nombres positifs : Elle est toujours positive, et ne s'annule jamais.

Cas plus général : travail/transformer 1 équation

Dans le cas plus général, c'est-à-dire quand l'équation n'est pas linéaire ou quadratique, il n'y a pas vraiment de recette pour trouver une solution, hormis en transformant les membres de l'équation.

Principe

Transformer les membres de l'équation n'est possible que si l'on effectue la même transformation à gauche et à droite de l'équation

$$A = B$$

$$A + x = B + x$$

$$\lambda A = \lambda B$$

Exemple : transformations valides non valides

Parmi les transformations des équations suivantes (d'une ligne à l'autre) dire celles qui sont bonnes et celles qui sont fausses

$$\begin{aligned} 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 0 \\ \iff 4x - 1 &= -2\sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5y - 3 &= 2 \\ \iff 5y &= 5 \end{aligned}$$

Même chose ci-après :

$$\begin{aligned} 3x + \frac{2}{x} &= 5x^2 \\ \iff 3x^2 + 2 &= 5x^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{y}{y + \sqrt{y}} &= \frac{y + \sqrt{y}}{y} \\ \iff 1 &= 1 + y \end{aligned}$$

Cas plus général : transformations monotones

Le principe précédent s'étend au cas des transformations monotones. L'équation $A = B$ s'écrit de manière équivalente $f(A) = f(B)$ quand f est strictement monotone.

Principe

Transformer les membres de l'équation n'est possible que si l'on effectue la même transformation à gauche et à droite de l'équation

$$A = B$$

$$f(A) = f(B)$$

Exemple

Simplifier, ou, écrire autrement, les équations suivantes

$$\ln(x) = \ln(y) \qquad \sqrt{x^2 + 1 - y} = x + y$$

Pour le premier exemple, l'équation $\ln(x) = \ln(y)$ est équivalent à

$$x = y$$

On le justifie en appliquant la fonction exponentielle au membre (original) de gauche, et au membre (original) de droite :

$$\ln(x) = \ln(y) \quad \Longleftrightarrow e^{ln(x)} = e^{ln(y)}, \text{ soit } x = y$$

Pour la seconde équation, on aime bien se débarrasser des racine. Le moyen ici est de passer au carré le membre de gauche et le membre de droite.

$$\sqrt{x^2 + 1 - y} = x+y \quad \Longrightarrow (\sqrt{x^2 + 1 - y})^2 = (x+y)^2, \text{ soit } x^2+1-y = x^2+2xy+y^2$$

soit encore après simplification $y^2 + 2xy + y - 1 = 0$.

Transformation - Lien logique

Transformer une équation, c'est retrouver une autre équation qui est sa conséquence :

Définition

On dit qu'une équation $C = D$ est une conséquence de l'équation $A = B$ si l'ensemble des variables solutions de l'équation $C = D$ est inclus dans l'ensemble des variables solutions de l'équation $A = B$. Si par ailleurs les solutions de l'équation $C = D$ sont aussi les solutions de l'équation $A = B$, ont dira que ces deux équations sont équivalentesx.

Exemple avec des puissance

Résoudre :

$$\frac{1}{2}x^{3/2} = 4 \qquad 2x = 8 \qquad 2x^{3/2} = \frac{1}{4}$$

Equation avec plusieurs variables, Courbe de niveau

En Gestion, on s'interresse souvent aux relations qu'il peut y avoir entre plusieurs variables, et c'est dans ce contexte que l'on retrouve des équations qui peuvent caractériser ce lien entre plusieurs variables. Il est parfois intéressant d'écrire cette relation entre deux variables comme une courbe de niveau, du type

$$f(p, q) = 0$$

où p et q désignent des variables, et f une fonction qui demeure constante pour les variables p et q.

Par exemple, $f(p, q) = 0$ est une écriture standard de l'équation

$$q = 70 - 3p$$

avec

$$f(p, q) = q - (70 - 3p) = q + 3p - 70$$

Equation avec plusieurs variables, correlations

On dit que deux variables qui sont conjointement définies par une équation sont *corrélées*, lorsqu'il est nécessaire que la deuxième variable augmente, quand la première variable augmente tout en respectant que l'équation demeure vérifiée. Dans le cas contraire, on parlera de *variables corrélées négativement*.

L'écriture de l'équation sous sa forme $f(p, q) = 0$ donne une méthode infaillible pour tester la correlation entre les variables (ici, p et q) en calculant les dérivées partielles de la fonction f (ici $\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$)

Théorème

Les deux variables sont positivement corrélées si les deux dérivées partielles sont de signe opposé, et négativement corrélées si les deux dérivées sont de même signe.

Equation avec plusieurs variables, exemple de correlation

Soit la relation suivante entre deux variables qu'on suppose positives

$$p = 10 + q^2$$

Il est immédiat dans ce cas là que lorsque q augmente, p augmente, ce qu'on énonce sous la forme *les deux variables p et q sont corrélées positivement*.

On réécrit l'équation sous la forme canonique $f(p, q) = 0$, avec $f(p, q) = p - q^2 - 10$. Les deux dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = -2q$$

Le fait que les deux dérivées sont de signe opposé réétablit que les les deux variables p et q sont corrélées positivement.

2. Résolution de une ou deux équations avec une ou deux variables

Système d'équation

Définition

En mathématiques, un système d'équations linéaires est un système d'équations constitué d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

Par exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{3x_2}{2} + x_3 = -1 \\ \frac{x_1}{2} + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + \frac{x_3}{4} = 3 \end{cases} \quad (S)$$

▶ ; Résoudre (S), c'est trouver toutes les valeurs qu'il faut donner à chaque inconnue en même temps pour que toutes les égalités soient vraies.

A simple example

Let consider the following system :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

- ; Trouver la solution. Rédiger ce que vous trouvez.
- ; Ecrire en deux lignes la méthode que vous avez suivie (intuitivement) pour arriver à la solution $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Résolution d'un système par substitution

Prenons par exemple le système : $\begin{cases} 4x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

La première équation permet d'exprimer y en fonction de x. Plus précisément, elle est équivalente à $y = -0{,}5 - 2x$ Remplaçons donc y par $-0{,}5 - 2x$dans la deuxième équation. On obtient :

$$\begin{aligned} 3x - (-0{,}5 - 2x) = 2 &\Leftrightarrow 3x + 0{,}5 + 2x = 2 \\ &\Leftrightarrow 5x + 0{,}5 = 2 \\ &\Leftrightarrow 5x = 1{,}5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3. \end{aligned}$$

Le système est donc équivalent à : $\begin{cases} y = -0{,}5 - 2x \\ x = 0{,}3 \end{cases}$. En remplaçant x par 0,3 dans la première équation, on obtient : $y = -0{,}5 - 2 \times 0{,}3$.

Le système a donc une unique solution : le couple $(x, y) = (0{,}3, -1{,}1)$.

Résolution d'un système par combinaison ou élimination

Cette méthode est aussi appelée « méthode par combinaison linéaire ».

Reprenons le système $\begin{cases} 4x + 2y &= -1 \\ 3x - y &= 2 \end{cases}$

On obtient un système équivalent en conservant la première ligne et en multipliant la seconde par 2 puis en lui ajoutant la première, de façon à éliminer y.

Le système devient : $\begin{cases} 4x + 2y &= -1 \\ 2 \times 3x - 2 \times y &= 2 \times 2 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} 4x + 2y &= -1 \\ 6x - 2y &= 4 \end{cases}$

puis (par addition) : $\begin{cases} 4x + 2y &= -1 \\ 10x &= 3 \end{cases}$,c'est-à-dire $\begin{cases} 4x + 2y &= -1 \\ x &= \dfrac{3}{10}. \end{cases}$

Remplaçons x par $\dfrac{3}{10} = 0{,}3$ dans la première ligne. Elle devient : $4 \times 0{,}3 + 2y = -1$;

$1{,}2 + 2y = -1$; $2y = -1 - 1{,}2 = -2{,}2$; $y = \dfrac{-2{,}2}{2} = -1{,}1$. Le système initial

est donc équivalent à $\begin{cases} y &= -1{,}1 \\ x &= 0{,}3 \end{cases}$

On retrouve ainsi qu'il a une unique solution : le couple $(0{,}3, -1{,}1)$.

Résolution d'un système linéaire 2x2 en général

Considérons un système de la forme $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

Définition

On appelle déterminant de ce système le nombre $\Delta = ad - bc$

Théorème

Ce système admet une solution unique ssi $\Delta \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

On est parfois confronté à un systèmes d'équations non linéaires tel :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Ici, la méthode de substitution fonctionne, en remplaçant par exemple x en fonction de y, dans la première équation.
On trouve dans cet exemple deux solutions : $(x, y) = (4, 0)$ et $(x, y) = (0, -$

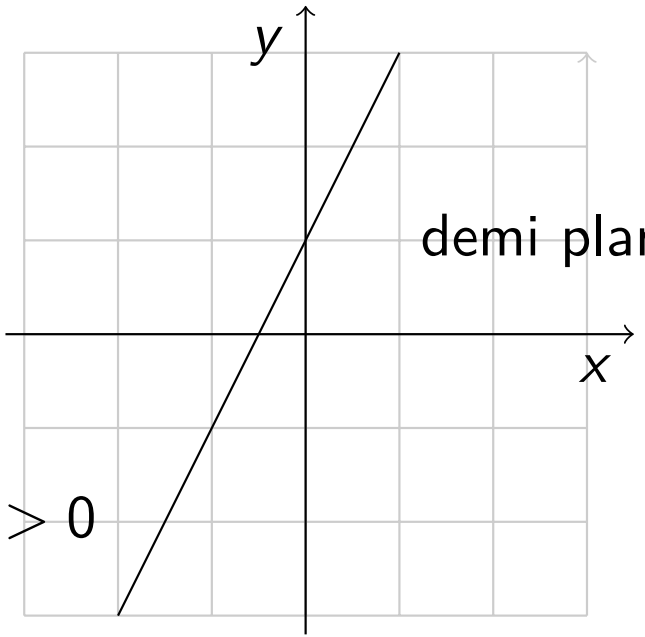
3. Ensemble définis par une ou plusieurs inéquations

Ce que sépare une droite dans le plan

▶ ; Considérons l'équation d'une droite, $ax + by + c = 0$, dans le plan

Theorème

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ sépare le plan en deux *demi-plans* (ouverts) distincts, d'équations respectives : $ax + by + c > 0$ et $ax + by + c < 0$



demi plan $y = 2x + 1 < 0$

demi plan $y = 2x + 1 > 0$

Représentation d'ensembles définis par des inéquations

Principe

Pour analyser un ensemble défini par des inéquations, on commence par Représenter l'ensemble défini par la/les inéquations écrites sous forme d'égalité, qui est à la frontière de l'ensemble recherché. On poursuit l'analyse, en recherchant, inéquation par inéquation les éléments du Plan qui ne satisfont pas l'inéquation.

▶ ; Ce genre d'analyse est très facilité quand la frontière délimite deux sous-ensembles. Il suffit alors de choisir un point particulier pour déterminer s'il est ou non dans le bon sous-espace.

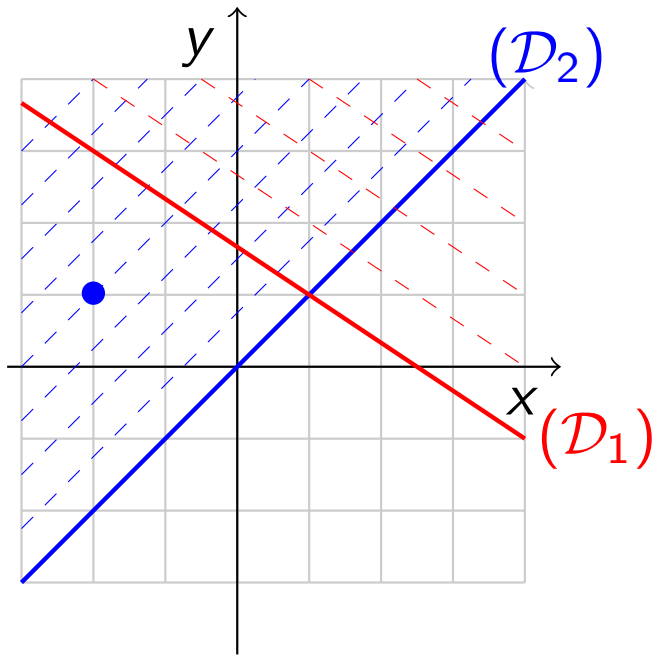
Exemples classiques (À résoudre sans hésiter)

- Représenter dans l'espace x_1, x_2 l'ensemble $10x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
- Représenter dans le Plan l'ensemble des paniers de biens (x_1, x_2) qu'un ménage (Johnny) dont le revenu est 100 peut s'acheter, sachant que le prix du bien 1 est de 10, celui du bien 2, de 1. On représentera plus particulièrement le panier $(9, 10)$ qui est consommé par Johnny.
- On suppose que l'environnement économique de Johnny subit deux modifications : le prix du bien 1 passe de 10 à 15, (celui du bien 2 n'est pas modifié) et, par ailleurs, on donne une compensation de revenu à Johnny qui lui permet de toujours consommer ce panier $(9, 10)$, malgré l'augmentation de prix. Après avoir calculé le montant de cette compensation, tracer la nouvelle contrainte budgétaire de Johnny.

Second Exemple

Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 & \leq & 0 \\ x - y & \geq & 0 \end{cases}$$



Première étape On commence par tracer la droite $(\mathcal{D}_1)$ d'équation $2x + 3y - 5 = 0$. On vérifie que $(0, 0)$ vérifie la première inéquation, ce qui nous induit à hachurer l'espace au-dessus de $(\mathcal{D}_1)$

Seconde étape On trace alors la droite $(\mathcal{D}_2)$ d'équation $y = x$. On vérifie que $(-2, 1)$ ne vérifie pas la seconde inéquation, ce qui nous induit à hachurer l'espace au-dessus de $(\mathcal{D}_2)$

Méthode dans le Plan

Lorsque l'on cherche à caractériser un ensemble défini par plusieurs inéquations, la méthode suivante aide toujours :

Représenter l'égalité — On écrit les inéquations sous forme d'égalité, et on les représente dans le Plan

- ; Si la/les équations séparent (chacune) le plan en deux,

Se suffire d'un point remarquable — On cherche si un point remarquable vérifie l'inégalité, pour chaque inégalité, et on hachure ce qui n'est pas bon

- ; Si l'équation ne sépare pas le plan en deux,

Avancer pas à pas — Il n'y a plus de méthode, mais ces cas sont relativement rares.

Délégation sur le marché du travail

Un Principal veut faire travailler un agent économique. Il lui demande de fournir une certaine quantité de travail q contre une rémunération w. L'utilité de l'agent économique est $U_\theta = t - \frac{1}{2\theta}q^2$, où θ désigne une caractéristique de productivité de l'agent "de type θ".

Il existe deux types dans l'économie, $\theta = 1$ et $\theta = 2$, également répartis. Le Principal veut proposer à chacun des types, un contrat qui lui convient mieux, cad (q_1, w_1) au type 1 et (q_2, w_2) au type 1 et mais, il ne connaît pas le type θ de l'agent.

Ecrire une condition sur les quatre variables $(q_1, w_1), (q_2, w_2)$ pour que l'agent de type 1 choisisse le contrat qui lui est destiné tandis que l'agent de type 1 choisisse le contrat qui lui est destiné.

▶ ; En déduire que toute proposition de travail impliquera $q_2 > q_1$ et conclure économiquement.

Fin du Chapitre 3