

# Introduction aux mathématiques financières

M1 - Arnold Chassagnon, Université de Tours, PSE - 2012

# Plan du cours

1. Notions élémentaires utiles à ce cours
2. Raisons pour lesquelles les gens désirent des actifs
3. Plan du cours de MATHEMATIQUES FINANCIERES

Actif zéro coupon

Pas d'incertitude à ce stade

Intérêt

Périodes

Taux d'intérêt

**1.**

Profil de revenu

Actif

Capital

Equivalence des flux de revenus

# Capital et intérêt

## Definition

Dans une relation de prêteur à emprunteur, le *Capital* désigne la somme qui est prêtée par le prêteur, somme qui devra lui être restituée à la fin de la période de prêt. Ce prêt se fait en général moyennant un *Intérêt* qui est une compensation que l'emprunteur paye au prêteur en dédommagement de ce prêt.

Typiquement, si le prêt d'un capital  $K$  ne dure que sur une période, et que  $I$  désigne l'intérêt, on aura les flux financiers suivants :

	$t = 0$	$t = 1$
bilan de l'emprunteur	$+K$	$-K - I$
bilan du prêteur	$-K$	$+K + I$

où  $t = 0$  désigne le début de la période, et  $t = 1$  désigne la fin de la période

# taux intérêt

Dans une relation de prêteur à emprunteur où le capital  $K$  et l'intérêt  $I$  sont bien définis, on représente le plus souvent l'intérêt par le taux d'intérêt.

## Definition

Le taux d'intérêt est la fraction du capital qui devra être versée à la fin de la période de prêt en dédommagement du prêt du capital. Si  $K, I, r$  désignent respectivement, le capital, l'intérêt et le taux d'intérêt, on a :

$$I = rK$$

Le plus souvent,  $r$  est désigné en pourcentage :

- ▶ si  $r = 0,1$ , alors on dira que  $r = 10\%$
- ▶ si  $r = 0,03$ , alors on dira que  $r = 3\%$
- ▶ si  $r = 0,01$ , alors on dira que  $r = 1\%$

# Périodicité des relations prêteurs / emprunteurs

Quel que soit le point de vue qu'on adopte, les besoins de financement ou les prêts s'étendent souvent sur plusieurs périodes. Dans ces cas là, l'habitude est de considérer les intérêts dûs à l'issue de chacune des périodes, afin de pouvoir retracer l'ensemble des flux financiers pour le prêteur et pour l'emprunteur.

## Exemple

Par exemple, si j'emprunte 10.000 € pendant cinq ans pour un taux d'intérêt annuel constant de 5% , on aura les flux financiers suivants :

### Bilans emprunteur et prêteur

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
Emprunteur	+10.000 €	-500 €	-500 €	-500 €	-500 €	-10.500 €
Prêteur	-10.000 €	+500 €	+500 €	+500 €	+500 €	+10.500 €

### Remarque

Quand je rembourse 500 € à la date  $t = 1$ , je n'ai pas remboursé le capital. Aussi, sur la période suivante, le capital prêté reste identique, et donc à  $t = 1$  tout se passe comme si l'emprunteur avait de nouveau emprunté sur la période allant de  $t = 1$  à  $t = 2$ , ce qui lui impose de rembourser la même somme de 500 € à la date  $t = 2$ .

À la fin du prêt, l'agent doit payer l'intérêt entre la période  $t = 4$  et  $t = 5$  et rembourser le capital dû.

# Les actifs (dans un environnement dynamique)

## Definition

On appelle Actif (ou actif financier) la description exhaustive de flux monétaires positifs ou négatifs aux dates futures,  $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 3$ ,  $t = 4$ , ... C'est généralement un *contrat* qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus ou des sommes dues dans l'ensemble des périodes futures.

## Exemple

Un banquier peut proposer à un étudiant de lui prêter aujourd'hui 3.000 € dans les conditions suivantes : les trois premières années, l'étudiant ne repaye rien, puis ensuite, l'étudiant (qui sera diplômé) devra verser 700 € chaque année pendant 8 années consécutives.

On peut formaliser l'histoire précédente en disant que l'étudiant a *vendu* au banquier pour un prix de 3.000 € l'actif

(0,	0,	0,	700,	700,	700,	700,	700,	700,	700,	700)
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$



# Le prix d'un actif

Souvent les actifs sont transmissibles et négociables, soit sur un marché organisé, soit lors d'une transaction de gré à gré.

## Definition

On appelle le prix d'un actif, le prix auquel s'échange cet actif entre deux personnes (personnes physiques ou morales). Cet échange intervient soit sur un marché organisé, ou lors d'une transaction de gré à gré.

- ▶ Dans le cadre de ce cours nous n'envisagerons que des actifs qui s'échangent à  $t = 0$  et dont l'ensemble des flux de revenus qu'ils sont susceptible de produire ou de retirer s'étendent dans les périodes futures  $t = 1, t = 2, \dots$
- ▶ Bien entendu, certains pans de la théorie économique cherchent à comprendre quelle peut être l'évolution du prix de ces actifs

# Profil de revenu

## Definition

Dans un univers *sans incertitude sur le futur*, on appelle profil de revenu d'un agent économique l'ensemble des revenus futurs de cet agent.

## Exemple

Un étudiant en M1 peut penser que son profil de revenu futur sera :

$$\begin{array}{cccccc} (0, & 1.500, & 1.600, & 1.800, & 2.500, & \dots) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ t=1 & t=2 & t=3 & t=4 & t=5 & t=6 \end{array}$$

en effet, à  $t=1$ , il sera en M2 et ne gagnera pas d'argent, puis pendant les trois années suivantes, il sera dans son premier poste avec quelques augmentations annuelles ; puis s'il a acquis de l'expérience et de la valeur sur le marché du travail, il pourra à partir de  $t=5$  changer d'entreprise dans de très bonnes conditions.

# L'hypothèse d'absence d'incertitude

## Remarque

Vous serez parfois étonné dans ce cours de l'hypothèse selon laquelle les agents connaissent sans incertitude aucune leurs profus de revenus futurs

- ▶ Cela est parfaitement justifié quand il s'agit d'actifs dont la liste des flux financiers futurs est *exactement* définie.
- ▶ Cette hypothèse est parfois faite *par convenance* pour simplifier l'analyse de l'environnement économique concerné.
- ▶ Cette hypothèse est parfois cohérente dans certains emplois où les profils de carrière sont déjà bien définis à l'avance.

# Actif zéro coupon

## Definition

On appelle actif zéro coupon de période  $t$  un actif qui délivre 1 € à la période  $t$  et c'est tout. On parle parfois d'*obligation zéro coupon*. Le détenteur de l'obligation zéro coupon ne perçoit aucun revenu (aucun coupon) durant la durée du titre.

## Remarque essentielle

**Ainsi, tout actif peut être compris comme la combinaison de plusieurs actifs zéro coupons.**

## Exemple

L'actif  $(0, 0, 0, 750, 750, 750, 750, 750, 750, 750, 750)$  rapporte exactement les mêmes flux financiers que la détention de 750 actifs zéro coupon de période 4, de 750 actifs zéro coupon de période 5, ... et de de 750 actifs zéro coupon de période 11.

Acheter des biens datés      Lisser la consommation

Institutions vendant ces biens datés

Bien non durables    Vendre des biens datés

## 2.

Valeur des biens datés      Actifs réels

Banques, marchés des matières premières et marchés financiers

Actifs financiers      Lisser le revenu

# Lisser la consommation

- ▶ les consommateurs ont des possibilités de consommer différentes, d'une période à l'autre. On dit qu'ils peuvent *lisser leur consommation* quand ils peuvent différer une consommation présente ou anticiper une consommation future.
- ▶ on part de l'hypothèse de biens non durables, c'est-à-dire d'un stock de biens qui ne peuvent pas être transférés physiquement d'une date à l'autre.
- ▶ Un lissage de la consommation est-il réalisable dans ce contexte où les biens ne peuvent pas être transférés d'une période à l'autre ?

## Lissage de la consommation et/ou du revenu

La question du lissage de la consommation met en scène l'impossibilité de transférer des biens d'une période à l'autre. Mais, en général, cette question apparaît dans des contextes où l'on considère le revenu.

- Les retraités ne doivent-ils pas consommer ?
- Je gagne au loto, dois-je tout dépenser aujourd'hui ?
- Puis-je financer mes études si je suis accepté à Harvard ?
- Peut-on manger au printemps des pommes, produits d'été ?

Et sous cette forme, ces questions sont trompeuses, car les moyens financiers semblent à première vue des biens "durables", pour lesquels la question de transfert intertemporel est triviale.

# Marché des biens datés

Le moyen unique pour pouvoir transférer sa consommation d'une période à l'autre est d'ouvrir des marchés de biens datés. c'est à dire, par ces marchés :

- je peux vendre des biens d'aujourd'hui pour acheter des biens demains
- je peux acheter plus de bien aujourd'hui en vendant (à découvert) des biens demain

En d'autres termes, le lissage de la consommation n'est possible que *si à une date donnée un agent consomme plus **en contrepartie d'un autre agent consomme moins*** de la même quantité.



# Echanges intertemporels

## Principe

Consommer plus aujourd'hui est possible aujourd'hui pour un agent n'est possible que s'il existe un autre agent qui accepte de consommer moins que ce qu'il pourrait.

## Exemple

Lorsque l'étudiant en M1 décide de consommer plus que ses moyens ne lui permettraient, car qu'il a trouvé un prêt lui permettant de consommer plus, c'est qu'à l'autre bout de la chaîne, il se trouve un autre agent, un actif le plus souvent, qui consomme moins que son revenu ne lui permettrait. L'histoire la plus probable est que cet actif a contracté un prêt quand il était jeune, et qu'il est actuellement en train de le rembourser, ce qui permet à la banque/système financier de prêter de l'argent à l'étudiant M1 .

# Valeur des flux datés / Coût du lissage de la consommation

La question centrale de ce chapitre est de pouvoir donner une valeur aux flux des périodes suivantes.

C'est un prolongement de la problématique précédente. Car si chaque bien daté possède un prix (pour un achat aujourd'hui), on montre qu'en ce qui concerne les flux de revenus de chaque période, on peut aussi définir un prix (que l'on nomme le taux d'intérêt).

Les mathématiques financières abordées dans ce cours s'intéresseront principalement à la question de la valeur des flux des périodes successives, et, plus généralement à la valeur actualisée des actifs financiers.

3.

# PLAN DU COURS DE MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Chapitre 0. Notions élémentaires

Chapitre 1. Actualisation

Chapitre 2. Evaluation par arbitrage

Chapitre 3. Produits dérivés et options  
réelles