

Outils Maths d'Aide à la Décision

Chapitre III

La maximisation d'une fonction avec une ou deux variables, avec contrainte

où l'on présente la maximisation d'une fonction, avec une ou deux variables, avec contrainte ; où l'on apprend les conditions première et seconde quand la contrainte joue son rôle et est saturée.

(Optimisation) Contrainte

Une contrainte est une règle qui réduit la liberté d'action. Cette notion est utilisée un peu partout en sciences sociales et en sciences. Par exemple,

- ❑ en droit penal, La contrainte judiciaire consiste à incarcérer une personne solvable qui n'est pas acquittée de certaines amendes ;
- ❑ en droit civil, la contrainte au sens procédural est le titre émis par l'administration fiscale ou un organisme social pour contraindre un débiteur à payer ses dettes.
- ❑ en psychologie, la contrainte de participation théorise l'intérêt que trouve un individu à s'engager dans un contrat.
- ❑ En mathématiques, l'optimisation définit une contrainte comme une égalité ou une inégalité que doivent satisfaire les solutions d'un problème, et qui complique généralement sa résolution.

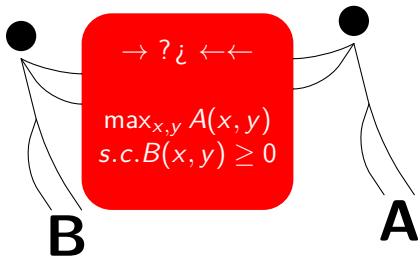
Variété des situations, structure commune

“The criterion being maximized, and the constraints imposed on the choice, vary from one context to the next : households’ consumption and labor supply, firms’ production, and governments’ policies. But all constrained maximization problems have a common mathematical structure, which in turn generates a common economic intuition for them.” A. Dixit, *Optimization in economic theory*

Usage spécifique du mot contrainte en économie

En économie, le mot *contrainte*, de consonance négative, apparaît en conjonction avec un mot positif, "le max". La raison en est que l'économie, qui étudie le meilleur usage des ressources rares, associe toujours liberté de choix et interdépendance avec le reste du monde.

Supposez que vous vous intéressiez à un agent A , et que le reste du monde soit représenté par un agent B , que l'agent A veuille optimiser son objectif $A(x, y)$, et que l'objectif du reste du monde dépende aussi des variables de choix de A , x et y , formalisé par $B(x, y)$.



Spécificité du programme quand la contrainte est saturée

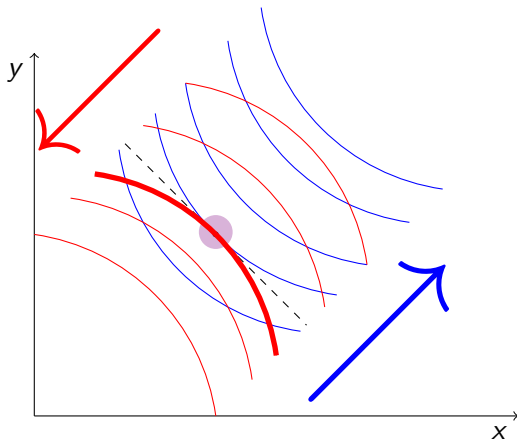
Au coeur du chapitre, la contrainte, plus précisément, la contrainte saturée.

Définition On dit qu'une contrainte d'un programme d'optimisation de type $g \geq 0$ est saturée (à l'optimum) si elle s'écrit pour toute solution du programme d'optimisation sous la forme $g = 0$.

Quand la contrainte n'est pas saturée, les solutions du programme d'optimisation avec et sans contrainte coïncident. Le programme est certes écrit avec une contrainte, mais son analyse ressort du chapitre précédent.

Contrainte non saturée	Contrainte saturée
Analyser le programme non contraint, avec les techniques du chapitre 2	Analyser le programme contraint, avec les techniques du chapitre 3

Représentation graphique typique dans \mathbb{R}^2



- En **bleu** l'objectif de celui qui pousse,
- En **rouge**, l'objectif de celui qui retient,
- En rouge **gras**, la contrainte = minimum pour celui qui retient

1er exemple : dans une économie d'échange avec deux unités de deux biens à partager entre deux agents A et B . Est-il judicieux de donner à chacun une unité de chaque bien, sachant que l'utilité du premier agent est $U_A(x, y) = \frac{2}{13} \ln(x) + y$ et que celle de l'agent B est $U_B(x, y) = xy$. Prenant acquis qu'on donnera à l'agent B l'utilité $U(1, 1)$, doit-on vraiment donner $(1, 1)$ à l'agent B ? Répondre à cette question c'est étudier le programme t

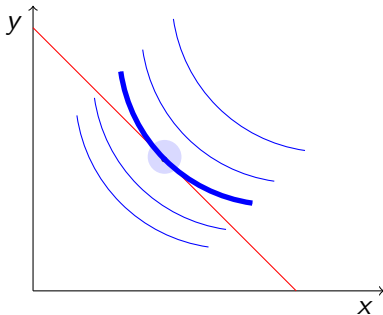
$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & \frac{2}{13} \ln(x) + y \\ \text{S.c.} \quad & (2-x)(2-y) \geq 1 \end{aligned}$$

► **2e exemple :** dans une économie de consommation, (x, y) désignent des ressources qui sont achetées par un agent A , limité par sa contrainte budgétaire. Le programme est

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & U(x, y) \\ \text{S.c.} \quad & p_x x + p_y y \leq R \end{aligned}$$

Choix du consommateur - argument de la tangente

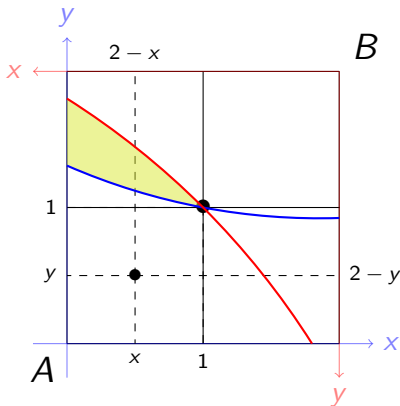
Le second exemple, le « choix du consommateur », est représenté dans la figure suivante, avec en rouge la contrainte et en bleu, l'objectif du problème considéré :



La courbe d'indifférence la plus haute compatible avec la droite budgétaire (en rouge) est celle qui est tangente à la droite budgétaire. La consommation optimale du consommateur est telle que la tangente de sa courbe d'indifférence (le TMS de bien x en bien y , U_x/U_y) égale le prix relatif p_x/p_y .

Répartition optimale des ressources

Le premier problème vous est moins habituel.



On appelle boîte d'Edgeworth ce graphique qui représente la répartition de ressources données entre deux agents. Un point de ce graphique de coordonnées (x, y) représente comme d'habitude ce qu'obtient A, mais aussi, dans le repère ayant B comme origine, aussi, à ce qu'il reste à B, cad $(2 - x, 2 - y)$. On vérifiera qu'au point $(1, 1)$, les courbes d'indifférence de A et de B sont comme indiquées (en bleu pour A et en rouge pour B)

On voit que donner $(1, 1)$ n'est pas une bonne solution, car dans la zone en vert, on peut atteindre des partages qui donnent plus d'utilité à l'un et/ou à l'autre.

D'où la résolution d'un programme du type

$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & \frac{2}{13} \ln(x) + y \\ \text{S.c.} & (2 - x)(2 - y) \geq 1 \end{array}$$

Plan du Chapitre « Maximisation sous contraintes »

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

Programme de maximisation d'une fonction $f(x, y)$

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, définie sur un ensemble fermé $X \times Y$.

Définition

On appelle maximum sous contrainte de la fonction f sur $X \times Y$, la valeur maximale que la fonction peut atteindre tout en respectant la contrainte. Formellement, le programme est le suivant

$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x, y, a) \\ \text{S.c.} & g(x, y) \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

Différents points d'intérêt dans l'optimisation

Lorsque l'on résout un programme optimal, les différents points suivants sont un objet d'intérêt et de recherche :

- le calcul de la solution, cad des variables qui maximisent l'objectif ;
- le calcul la valeur obtenue de la fonction objectif ;
- l'énoncé des conditions pour lesquelles il existe une solution
- l'étude des propriétés des solutions, sans nécessairement les calculer

Questionnements, par étapes progressives

$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x,y) \\ \text{s.c} & g(x,y) \geq 0 \end{array}$$

Une solution existe-t'elle ?

Calcul de la/des solution(s)

La contrainte est-elle saturée ?

Propriétés nécessaires des solutions ?

Propriétés des solutions ?

Au début de l'analyse

L'analyse d'un programme optimal est séquentielle. Elle s'appuie sur ces deux remarques :

- ▶ Si la solution est telle que la contrainte n'est pas saturée, alors la recherche de l'optimum se fait sans tenir compte de la contrainte, c-a-d on est renvoyé à l'analyse du programme non contraint
- ▶ Si, au contraire, la solution est telle que la contrainte est saturée, alors il s'agira d'analyser pleinement ce problème contraint, en recherchant, comme on l'avait fait pour les programmes non contraints des solutions nécessaires.

Analyser un programme d'optimisation contraint

- 1) On analyse le programme sans contrainte.
- 2) Si la solution du programme non contraint satisfait la contrainte, bingo
- 3) Sinon, (à suivre), la solution sera à rechercher parmi les points stationnaires

Exemples qui seront analysés pendant le cours

Les programmes suivants seront étudiés comme exemple :

$\max_{x,y \geq 0} A(x,y)$ s.c. $B(x,y) \geq 0$, où $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont définis, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, par :

$$\text{Programme (i)} : A(x,y) = x^2 + y^2 \quad B(x,y) = 10 - 2x - 5y$$

$$\text{Programme (ii)} : A(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad B(x,y) = 10 - 2x - 5y$$

$$\text{Programme (iii)} : A(x,y) = xy \quad B(x,y) = (10 - 2x - 5y)^2$$

$$\text{Programme (iv)} : A(x,y) = \ln(x) + \ln(y) \quad B(x,y) = 1 - \ln(x) - \ln(y)$$

$$\text{Programme (v)} : A(x,y) = e^{x+y} \quad B(x,y) = 10 - 2x - 5y$$

$$\text{Programme (vi)} : A(x,y) = xy \quad B(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

Définition des Points stationnaires

Considérons le programme (1) :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x, y, a) \\ \text{s.c.} & g(x, y) \geq 0 \end{array} .$$

Définition

On dit que (x, y) est un point stationnaire du programme (1) si les conditions $g_x \neq 0$ et $g_y \neq 0$ sont vérifiées ainsi que la condition

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \quad (2)$$

Conditions premières du programme

Considérons le programme (1) :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x, y, a) \\ \text{s.c.} & g(x, y) \geq 0 \end{array} .$$

Proposition

Si (x, y) est une solution intérieure du programme (1), alors, c'est nécessairement un point stationnaire. On appelle condition première (ou FOC) la ou les équations qui traduisent cette propriété.

- La condition (2) présentée précédemment, $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$, est une condition nécessaire que doit vérifier le maximum, uniquement si ce dernier est une solution intérieure. En tout état de cause, c'est une des premières conditions qu'il faut analyser pour la recherche des solutions d'un programme de maximisation.

Premier Exemple de conditions premières

Reprenons le problème principal agent du premier chapitre Un principal veut faire produire un bien à un agent. q unités produites lui rapportent q et le coût de l'agent est de $\frac{1}{2\theta}q^2$.

Le Principal doit donc choisir t et q et faire que le transfert couvre au moins le coût de l'agent. Le programme est le suivant :

$$\begin{aligned} \max_{q,t} \quad & q - t \\ \text{S.c.} \quad & t \geq \frac{1}{2\theta}q^2, \end{aligned}$$

En reprenant les notations précédentes : $f = q - t$, $g = t - \frac{1}{2\theta}q^2$,

$$f_q = 1 \quad g_q = -q/\theta \quad f_t = -1 \quad g_t = 1$$

Les conditions premières (2) appliquées à cet exemple sont :

$$-\theta/q = -1 \quad \iff q = \theta$$

► Attention : il faudra (ensuite) vérifier que $q^* = \theta$ est bien la solution optimale. On pourra poursuivre l'analyse en vérifiant qu'alors $t^* = \frac{1}{2\theta}q^2 = \theta/2$

Autre Exemple de conditions premières

Trouver les conditions premières du programme $\max_{x,y \geq 0} A(x,y) \quad \text{s.c.} \quad B(x,y) \geq 0$, où $A(x,y) = xy$ et $B(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

On Calcule les quatre dérivées A_x, A_y, B_x, B_y :

$$A_x = y \qquad A_y = x \qquad (3)$$

$$B_x = -2x \qquad B_y = -2y \qquad (4)$$

On divise les deux lignes, à gauche, d'une part et à droite, d'autre part. La FOC est :

$$\frac{y}{-2x} = \frac{x}{-2y},$$

ce qu'on peut encore écrire $y^2 = x^2$, ce qui est équivalent à la condition

$$x = y$$

Une solution intérieure de ce programme vérifie toujours $x = y$

Intuition des conditions premières - argument d'arbitrage

Supposons que (x, y) est une solution et considérons des variations autour de (x, y) , respectivement dx et dy . Ces variations modifient la valeur de f (qui devient $f + df$) ET de g (devenant $g + dg$). Or (cf. Maths de L1) ces variations df et dg dépendent *linéairement* de dx et dy comme suit :

$$df = f_x dx + f_y dy \quad dg = g_x dx + g_y dy$$

où f_x , f_y , g_x et g_y sont les dérivées de f et g par rapport à x et y .

On s'intéresse plus précisément aux variations (dx, dy) qu'on appelle «arbitrages», telles que $dg = g_x dx + g_y dy = 0$. Intuitivement au cours d'un arbitrage, g est "constant" et, par suite, la contrainte reste satisfaite.

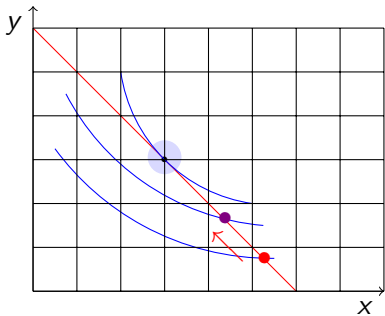
Au cours d'un arbitrage, $g_x dx = -g_y dy$ et on peut introduire la valeur (petite) dc , définie par $dc = g_x dx = -g_y dy$. On peut alors réécrire dx , dy , puis df comme proportionnels à dc

$$dx = \frac{1}{g_x} dc \quad dy = \frac{1}{g_y} dc \quad df = f_x dx + f_y dy = \left(\frac{f_x}{g_x} - \frac{f_y}{g_y} \right) dc$$

Si on est à l'optimum, il ne faut pas que cette variation autour de (x, y) puisse rendre possible $df > 0$. On en déduit que *nécessairement* : $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$. □

Argument de l'arbitrage dans le problème du consommateur

Considérons pour illustrer l'intuition des conditions premières le problème spécifique bien connu du consommateur $\max_{x,y} U(x,y)$ sc. $p_x x + p_y y \leq R$.



Si l'on se place en le point rouge, on a intérêt à aller vers la gauche. En effet, si on considère d'acheter moins du premier bien, $-dx$, ce qui permet d'acheter $dy = +\frac{p_x}{p_y} dx$, l'utilité diminue de $-U_x dx$ et augmente de $+U_y \frac{p_x}{p_y} dx$:

$\Delta U = \left(-U_x + U_y \frac{p_x}{p_y} \right) dx$. Tant que le terme entre parenthèse n'est pas nul, il y aura toujours des réarrangements entre les consommation de x et de y qui conduiront à augmenter l'utilité.

DONC, la condition d'absence d'arbitrage est : $\frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y}$

Définition du Shadow price

les conditions premières, cad l'égalité du rapport des dérivées marginales de f et g par rapport à chacune des variable conduisent à définir une constante qu'on nomme habituellement λ :

$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

Les Conditions premières peuvent se réécrire, avec l'introduction de ce paramètre sous la forme

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad (5)$$

► L'interprétation des FOC est que les vecteurs dérivées de la fonction objectif f et de la contrainte g sont proportionnels. λ désigne le terme de proportionalité. Ce coefficient est au coeur de la méthode de Lagrange expliquée dans la section suivante

Consommateur - Shadow price et utilité marginale du revenu

Considérons ce consommateur qui consomme son panier optimal. Que fait-il s'il advient qu'il reçoive un revenu supplémentaire dR ?

Il peut le dépenser en bien x , achetant la quantité dR/p_x et augmentant son utilité marginale de $U_x dR/p_x$

Il peut le dépenser en bien y achetant la quantité dR/p_y et augmentant son utilité marginale de $U_y dR/p_y$

Il se trouve que la condition de consommation optimale implique que les deux incréments d'utilité U_x/p_x et U_y/p_y sont égaux. On peut alors définir **l'utilité marginale du revenu**, indépendamment de la manière dont ce revenu est dépensé, qu'on note λ :

$$\lambda = \frac{U_x}{p_x} = \frac{U_y}{p_y},$$

équation que l'on écrit $U_x = \lambda p_x$ et $U_y = \lambda p_y$.

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

Ce qu'on appelle une contrainte saturée

Dans un problème d'optimisation, on rencontre des contraintes sous la forme d'une inégalité *non stricte*

$$g(x, y) \geq 0$$

La nature du problème d'optimisation sous contrainte est très différente selon qu'à l'optimum la contrainte est vérifiée comme une inégalité stricte $g(x, y) > 0$ ou comme une égalité $g(x, y) = 0$. En effet, dans le premier cas, la contrainte n'est pas vraiment restrictive, alors que dans le second cas, la recherche de l'optimum aura conduit à réaliser la contrainte sous la forme d'égalité.

Définition

On dit que la contrainte est saturée, si à l'optimum du programme de maximisation, il est nécessaire que la contrainte soit écrite comme une *égalité* ($g(x, y) = 0$).

Résoudre un programme oblige de savoir si la contrainte est saturée à l'optimum

Contrainte et programme non contraint

Comme déjà évoqué, la contrainte ajoute au programme des conditions qui diminuent les possibilités d'emploi des outils. Une des questions essentielles qu'il conviendra toujours d'aborder est de savoir si ces restrictions ont été ou non déterminantes pour la détermination des solutions.

À cette fin, on fait une analyse en parallèle du programme contraint le même programme à la différence que l'on ne considère pas la contrainte (dit « programme non contraint »). On a en fait deux plus un cas, si on considère à la fois le programme contraint et le programme non contraint.

- | | | | |
|-------|------------------------|---|--|
| (NS=) | Contrainte non saturée | & | Les deux programmes contraints et non contraints ont les mêmes solutions |
| (S≠) | Contrainte saturée | & | Les deux programmes contraints et non contraints n'ont pas les mêmes solutions |
| (S=) | Contrainte saturée | & | Les deux programmes contraints et non contraints ont les mêmes solutions |

Rôle restrictif ou non de la contrainte, quand il y a une solution

Repartons des deux premiers cas évoqués précédemment, le troisième cas évoqué n'étant pas générique : soit la contrainte n'est pas saturée, et il y a une identité entre les programmes contraints et non contraints, soit, au contraire, la contrainte joue un rôle structurant, et, elle est saturée.

Principe

Dans un problème de maximisation avec contrainte,

- 1 Il est toujours vrai que si la contrainte n'est pas saturée, c'est qu'elle n'apportait pas de restriction, et qu'alors la solution du programme contraint et la solution du programme non contraint coïncident
- 2 Il est en général vrai que si la contrainte est saturée, c'est qu'elle apporte une restriction essentielle au programme de maximisation, et qu'alors la solution du programme non contraint n'a pas de lien avec une éventuelle solution du programme contraint.

Méthode pour étudier la saturation ou non de la contrainte

Ce qui est déterminant dans l'étude d'un programme, c'est d'étudier les raisons pour lesquelles la contrainte est ou n'est pas saturée.

La proposition aide à conclure concernant la saturation ou non de la contrainte quand la solution considérée est intérieure.

Proposition

Si (x, y) est une solution intérieure du programme (1), et si en ce point, l'une des deux dérivées f_x ou f_y n'est pas nulle, alors sous l'hypothèse que la fonction g est continue, la contrainte est saturée.

Saturation de la contrainte, s'il y a une solution, dans 6 exemples

Considérons (x^*, y^*) solution de $\max_{x,y \geq 0} A(x, y)$ s.c. $B(x, y) \geq 0$:

Programme (i) : $A(x, y) = x^2 + y^2$ $B(x, y) = 10 - 2x - 5y$

$A_x = 2x; A_y = 2y$; si $(x^*, y^*) \neq (0, 0)$: la contrainte est saturée

Programme (ii) : $A(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ $B(x, y) = 10 - 2x - 5y$

$A_x = 1/2\sqrt{x} > 0; A_y = 1/2\sqrt{y} > 0$; : la contrainte est toujours saturée

Programme (iii) : $A(x, y) = xy$ $B(x, y) = (10 - 2x - 5y)^2$

$A_x = y; A_y = x$; si $(x^*, y^*) \neq (0, 0)$: la contrainte est saturée

Programme (iv) : $A(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$ $B(x, y) = 1 - \ln(x) - \ln(y)$

$A_x = 1/x > 0; A_y = 1/y > 0$; : la contrainte est toujours saturée

Programme (v) : $A(x, y) = e^{x+y}$ $B(x, y) = 10 - 2x - 5y$

$A_x = e^{x+y} > 0; A_y = e^{x+y} > 0$; : la contrainte est toujours saturée

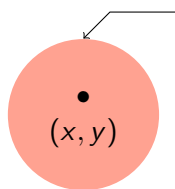
Programme (vi) : $A(x, y) = xy$ $B(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

$A_x = y; A_y = x > 0$; si $(x^*, y^*) \neq (0, 0)$: la contrainte est saturée

Attention, la conclusion sur la saturation est sous condition d'existence de la solution. Il pourrait ne pas y avoir de solution pour certains cas

Méthode indiquant que la contrainte est saturée (Intuition/Preuve)

Qu'est-ce qu'implique $g(x, y) > 0$, cad la non saturation de la contrainte ? Tout simplement que dans une boule autour de (x, y) la condition $g(x, y) > 0$ est vérifiée. Or si (x, y) est le maximum du programme contraint, cad f quand $g \geq 0$ est vérifié, il doit rester le maximum de f dans cette boule où la contrainte est vérifiée



Voisinage du point (x, y) où reste vérifié $g(x + dx, y + dy) > 0$

Le raisonnement conduisant à démontrer le principe indiquant que la contrainte est saturée lorsque f_x ou f_y n'est pas nul s'effectue par l'absurde. Dans le cas où (x, y) est une solution intérieure, si $g(x, y) > 0$, alors, on trouve alors une boule autour de (x, y) où cette inégalité $g(x, y) > 0$ est satisfaite, cad la contrainte est vérifiée. Si par ailleurs en (x, y) f_x ou f_y n'est pas nul, alors (x, y) ne peut pas être le maximum de la fonction f sur cette boule. Il existe donc un autre point (x', y') dans la boule telle que $f(x', y') > f(x, y)$ et, nécessairement, puisque (x', y') est dans la boule, la contrainte est vérifiée en ce point : $g(x', y') > 0$; tout cela contredit le fait que (x, y) était la solution de notre programme.

Enjeu à propos de la saturation de la contrainte

Considérons le programme (1) :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x,y) \\ \text{s.c.} & g(x,y) \geq 0 \end{array} .$$

En fait, une bonne partie du déroulement de l'analyse va découler de la question de la saturation ou non de la contrainte du programme

- ▶ Lorsque la contrainte est saturée, on a une équation supplémentaire, $g(x,y) = 0$ qu'on pourra en général combiner avec les conditions premières ... et, trouver les solutions.
- ▶ Si la contrainte n'est pas saturée, le problème est moins complexe car il s'agit de trouver un maximum local, compatible avec la contrainte, du programme non contraint

Quand on aborde l'étude d'un programme contraint, il est bien d'accumuler au début de l'analyse des connaissances générales sur le cas étudié

- Ψ si la fonction objectif est bornée ou non (programme non contraint a une solution ou non)
- ≡ Si le programme non contraint a une solution regarder si elle satisfait la contrainte
- Φ Si le programme non contraint a des points stationnaires $f_x = 0$ et $f_y = 0$, regarder si ils satisfont la contrainte

Ensuite, mais ensuite seulement, on pourra écrire les conditions premières, si elles s'appliquent ainsi que la saturation ou non de la contrainte.

Résolution (provisoire) de l'exemple I

Considérons le programme :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & x^2 + y^2 \\ \text{s.c.} & 10 - 2x - 5y \geq 0 \end{array}$$

- ψ la fonction objectif est non bornée, le programme non contraint diverge
- ≡ Comme en dehors de $(0,0)$ qui est un minimum, $A_x > 0$ ou $A_y > 0$, on sait que s'il y a une solution, la contrainte sera saturée : $2x + 5y = 10$.
- Pour écrire la FOC, $A_x = 2x$, $A_y = 2y$, $B_x = -2$, $B_y = -5$: $2x / -2 = 2y / -5$ soit encore $x = \frac{2}{5}y$

En résolvant le système des deux équations de la contrainte saturée et de la FOC, on trouve un unique point stationnaire saturant la contrainte $x = \frac{20}{29}$ et $y = \frac{50}{29}$.

- ζ On démontrera dans la suite de l'analyse que ce candidat pour l'optimum n'en n'est pas un !

Résolution (provisoire) de l'exemple II

Considérons le programme :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \text{s.c.} & 10 - 2x - 5y \geq 0 \end{array}$$

- ψ la fonction objectif est non bornée, le programme non contraint diverge
- ≡ Comme en dehors de (0, 0) qui est un minimum, $A_x > 0$ ou $A_y > 0$, on sait que s'il y a une solution, la contrainte sera saturée : $2x + 5y = 10$.
- Pour écrire la FOC, $A_x = 1/2\sqrt{x}$, $A_y = 1/2\sqrt{y}$, $B_x = -2$, $B_y = -5$: $1/(-4\sqrt{x}) = 1/(-10\sqrt{y})$ soit encore $\sqrt{x} = \frac{5}{2}\sqrt{y}$ ou $x = \frac{25}{4}y$

En résolvant le système des deux équations de la contrainte saturée et de la FOC, on trouve un unique point stationnaire saturant la contrainte $x = \frac{50}{14}$ et $y = \frac{20}{35}$.

- ζ On démontrera dans la suite de l'analyse que ce candidat pour l'optimum est bien la solution !

Résolution (définitive) de l'exemple III

Considérons le programme : $\max_{x,y} xy$
s.c. $(10 - 2x - 5y)^2 \geq 0$.

- Ψ la fonction objectif est non bornée, le programme non contraint diverge
- ≡ Comme en dehors de $(0,0)$ qui est un minimum, $A_x > 0$ ou $A_y > 0$, on sait que s'il y a une solution, la contrainte sera saturée : $(2x + 5y - 10)^2 = 0$, s'il y a une solution .
- Pour écrire la FOC, $A_x = y$, $A_y = x$, $B_x = -2(10 - 2x - 5y)$, $B_y = -5(10 - 2x - 5y)$; Donc, à l'optimum, puisque la contrainte sera saturée $B_x = 0$ et $B_y = 0$: *On ne peut pas écrire la FOC dans cet exemple.*
- Φ En fait, on doit remarquer à ce stade que la contrainte est, par nature, toujours vérifiée : elle n'est donc pas contraignante, et il y a identité entre le programme d'optimisation contraint et le programme d'optimisation non contraint. Or ce dernier diverge

On a donc tout de suite la réponse

ζζ Le problème d'optimisation III diverge, il n'a pas de solution.

Résolution (définitive) de l'exemple IV

Considérons le programme :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & \ln(x) + \ln(y) \\ \text{s.c.} & 1 - \ln(x) - \ln(y) \geq 0 \end{array}$$

- ψ la fonction objectif est non bornée, le programme non contraint diverge
- ≡ Il est toujours vrai que $A_x > 0$ et $A_y > 0$, on sait que s'il y a une solution, la contrainte sera saturée :
 $\ln(x) + \ln(y) = 1$.
- Pour écrire la FOC, $A_x = 1/x$, $A_y = 1/y$, $B_x = -1/x$, $B_y = -1/y$: $(1/x)/(-1/x) = (1/y)y/(-1/y)$ soit encore $1 = 1$.

La contrainte saturée s'écrit : $1 - \ln(x) - \ln(y) = 0$, soit encore $\ln(x) + \ln(y) = 1$. Mais là, c'est trivial. Quand cette contrainte est saturée, l'objectif est constant égal à 1. En faisant cette remarque au préalable on résolvait directement le programme.

ζζ **Dans l'exemple IV, tout couple (x, y) vérifiant $\ln(x) + \ln(y) = 1$ est solution optimale de ce programme. [remarquez que la condition s'écrit aussi $y = e/x$.]**

Résolution (définitive) de l'exemple V

Considérons le programme :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & e^{x+y} \\ \text{s.c.} & 10 - 2x - 5y \geq 0 \end{array}$$

- ψ la fonction objectif est non bornée, le programme non contraint diverge
- ≡ Il est toujours vrai que $A_x = e^{x+y} > 0$ et $A_y = e^{x+y} > 0$, on sait que s'il y a une solution, la contrainte sera saturée : $2x + 5y = 10$.
- Pour écrire la FOC, $A_x = e^{x+y}$, $A_y = e^{x+y}$, $B_x = -2$, $B_y = -5$: Impossible d'écrire la FOC, car on a jamais $e^{x+y} / -2 = e^{x+y} / -5$. On en déduit donc que la solution est nécessairement en coin.

Les deux points en coin à considérer sont $X = (5, 0)$ et $Y = (0, 2)$. On vérifie que l'objectif est le plus élevé en X .

ζζ La solution optimale du programme V est $X = (5, 0)$

Résolution (provisoire) de l'exemple VI

Considérons le programme :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & xy \\ \text{s.c.} & 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{array}$$

- ψ la fonction objectif est non bornée, le programme non contraint diverge
- ≡ Comme en dehors de (0, 0) qui est un minimum, $A_x > 0$ ou $A_y > 0$, on sait que s'il y a une solution, la contrainte sera saturée : $2x + 5y = 10$.
- Pour écrire la FOC, $A_x = y$, $A_y = x$, $B_x = -2x$, $B_y = -2y$: $y / -2x = x / -2y$ soit encore $x^2 = y^2$ ou $x = y$.

En résolvant le système des deux équations de la contrainte saturée et de la FOC, on trouve un unique point stationnaire saturant la contrainte $x = y \frac{10}{7}$.

- ζ On démontrera dans la suite de l'analyse que ce candidat pour l'optimum est bien la solution !

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

Définition du Lagrangien

Le mathématicien LAGRANGE qui étudiait déjà au XVIIIe siècle les problèmes d'optimisation a eu l'idée de combiner en une seule fonction l'objectif f et la contrainte g .

Définition

On appelle *Lagrangien*, qu'on note $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ l'expression :

$$\mathcal{L} = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Ecriture du Lagrangien pour les exemples du cours

Expression du Lagrangien pour ces six programmes $\max_{x,y \geq 0} A(x,y)$ s.c. $B(x,y) \geq 0$:

Programme (i) : $A(x,y) = x^2 + y^2$ $B(x,y) = 10 - 2x - 5y$
 $\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda(10 - 2x - 5y)$

Programme (ii) : $A(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ $B(x,y) = 10 - 2x - 5y$
 $\mathcal{L} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \lambda(10 - 2x - 5y)$

Programme (iii) : $A(x,y) = xy$ $B(x,y) = (10 - 2x - 5y)^2$
 $\mathcal{L} = xy + \lambda(10 - 2x - 5y)^2$

Programme (iv) : $A(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$ $B(x,y) = 1 - \ln(x) - \ln(y)$
 $\mathcal{L} = \ln(x) + \ln(y) + \lambda(1 - \ln(x) - \ln(y))$

Programme (v) : $A(x,y) = e^{x+y}$ $B(x,y) = 10 - 2x - 5y$
 $\mathcal{L} = e^{x+y} + \lambda(10 - 2x - 5y)$

Programme (vi) : $A(x,y) = xy$ $B(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
 $\mathcal{L} = xy + \lambda(1 - x^2 - y^2)$

Théorème de Lagrange

Soit le programme (1) :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x,y) \\ \text{s.c.} & g(x,y) \geq 0 \end{array} .$$

Théorème de LAGRANGE

Si (x, y) est une solution intérieure du programme (3), alors, il existe une valeur λ telle que (x, y) est la solution du programme *non contraint*

$$\max_{x,y} f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

► L'approche de Lagrange est qu'on peut réaliser l'étude d'un programme contraint en étudiant un programme non contraint : plus simple, non ?
(on a cependant un paramètre supplémentaire : le λ)

Conditions premières et Théorème de Lagrange

Considérons le programme (1) :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x,y) \\ \text{s.c.} & g(x,y) \geq 0 \end{array} .$$

Corollaire du théorème de Lagrange

Si (x, y) est une solution intérieure du programme (1), et si λ est le coefficient de Lagrange du théorème de Lagrange, alors, les trois relations suivantes sont toujours vérifiées

$$\mathcal{L}_x = 0 \quad \mathcal{L}_y = 0 \quad \lambda \mathcal{L}_\lambda = 0$$

La 3e condition s'écrit équivalamment soit $\lambda = 0$, soit $\mathcal{L}_\lambda = 0$

► Il s'agit donc en pratique d'écrire le Lagrangien, et de le dériver par rapport à x et à y (et à λ). Ce qu'on obtient par le théorème de Lagrange : ce sont les conditions premières ! plus une troisième condition concernant la saturation de la contrainte.

Exemple de la méthode de Lagrange

Considérons le programme :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & xy \\ \text{s.c.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} .$$

Dans ce problème le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = xy + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

les deux dérivées partielles sont : $\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = y - \lambda(2x)$ et $\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = x - \lambda(2y)$ et les deux conditions premières sont :

$$y = 2\lambda x \quad x = 2\lambda y$$

impliquant, en les divisant, membre par membre (s'ils ne sont pas nuls) que $y/x = x/y$, soit $x=y$.

La troisième condition vient de la saturation de la contrainte, évidente dans ce problème, ce qui conduit à $x = y = \sqrt{1/2}$.

► Attention : l'exemple n'est pas terminé tant qu'on a pas vérifié qu'on est bien à un maximum. Pour l'instant, on sait seulement que $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ est un point stationnaire du programme.

Intuition de la méthode de Lagrange

Dans le programme standard $\max_{x,y} f(x,y)$ s.c. $g(x,y) \geq 0$ les deux fonctions f et g jouent deux rôles différents. L'objet du programme est d'avoir f le plus grand possible, mais on ne peut pas diminuer g en deçà d'un certain seuil, cad qu'il faut assurer au moins $g \geq 0$.

Le cas intéressant est quand la contrainte joue un rôle cad que les deux objectifs f et g sont d'une certaine manière opposés, cad qu'on ne peut augmenter f qu'au risque de contrarier g .

► L'intuition de Lagrange, est que dans ce type de problème, il faut trouver une sorte de compromis, et que ce compromis est trouvable en considérant une combinaison linéaire de f et g du type $\alpha f + (1 - \alpha)g$.

- 1 Bien entendu, il est intuitif qu'on ne peut pas avoir $\alpha = 0$, sinon, on ne prendrait pas en compte l'objectif f
- 2 Alors, s'intéresser à $\max \alpha f + (1 - \alpha)g$ est équivalent à s'intéresser au maximum de la fonction $\max f + \frac{1-\alpha}{\alpha}g$. En posant $\lambda = \frac{1-\alpha}{\alpha}$... on retrouve le Lagrangien.

En passant, que signifie f et g ont des objectifs opposés ?

On en comprend bien **l'intuition** pour ces différents couples

$$\begin{array}{ll} f = x + y & g = 1 - x^2 - y^2 \\ f = x^2 + y^2 & g = 1 - x - y \end{array} \quad \begin{array}{ll} f = e^x + y & g = 1 - x^2 - y^2 \\ f = e^x + \ln(y) & g = 1 - x^4 y^2 \end{array}$$

cad que pour que f soit grand, il faut que x et/ou y soient grand, mais dans une certaine limite posée par la contrainte $g \geq 0$.

Comment le formaliser ?

Définition

On dit que deux fonctions f et g d'un programme sous contrainte ont des objectifs opposés quand il existe une valeur α tels que les deux ensembles $\{g \geq 0\}$ et $\{f \geq \alpha\}$ sont disjoints.

► En d'autres termes, pour avoir $f \geq \alpha$ on est obligé de ne pas satisfaire la contrainte $g \geq 0$.

Chapitre III - Section 2 - partie A

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

Conditions secondes : le problème

Considérons le programme (1) :
$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & f(x, y, a) \\ \text{S.c.} & g(x, y) \geq 0 \end{array}$$

Jusqu'à présent, on sait caractériser certaines points stationnaires qui vérifient des conditions premières. Comment peut-on s'assurer qu'ils correspondent à un maximum de la fonction ?

quasiconcavité de la fonction objectif

Définition

On dit qu'une fonction f est quasiconcave si les ensemble $\{f(x, y) \geq \alpha\}$ sont tous convexes, quels que soit α

Proposition

Si une fonction f est concave, alors, elle est quasiconcave. L'inverse n'est pas vrai.

► La preuve est assez immédiate. Vous vous souvenez qu'une fonction concave vérifie $f(\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}) \geq \lambda f(\vec{a}) + (1-\lambda)f(\vec{b})$. Si deux points \vec{a} et \vec{b} appartiennent à $\{f(x, y) \geq \alpha\}$, alors $f(\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}) \geq \lambda f(\vec{a}) + (1-\lambda)f(\vec{b}) \geq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$, ce qui achève de montrer que $\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b} \in \{f(x, y) \geq \alpha\}$, et donc que $\{f(x, y) \geq \alpha\}$ est convexe.

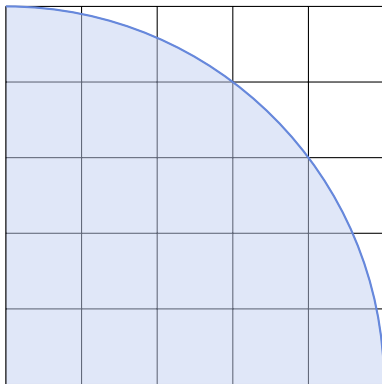
quasiconcavité en pratique

On trace une courbe d'indifférence générique $\{f(x, y) = \alpha\}$, et plus généralement la surface $\{f(x, y) \geq \alpha\}$. La courbure de la frontière de la courbe $\{f(x, y) = \alpha\}$, plus précisément, le fait qu'elle soit concave permet de conclure.

► Par exemple, démontrer que $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ n'est pas quasiconcave. pour $x > 0$ et pour $y > 0$.

Exemple de quasiconcavité

$g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ n'est pas quasiconcave.



Optimisation avec f et g concaves

Le résultat obtenu dans le cas des programme non contraints se généralise.

Théorème d'optimisation avec fonction concaves

Etant donné f et g concaves, alors, (x^*, y^*) intérieur au domaine maximise $f(x, y)$ s.c. $g(x, y) \geq 0$ si et seulement si (x^*, y^*) est stationnaire.

- Critère simple de résolution dans ce cas là
- Si (x^*, y^*) est la solution optimale intérieure au domaine, alors, (x^*, y^*) est stationnaire : c'est la condition première, nécessaire.
- Partons maintenant de (x^*, y^*) stationnaire. Considérons $\lambda = -f_x/g_x$. On vérifie alors que (x^*, y^*) est stationnaire pour le programme non contraint $\max_{x,y} \mathcal{L}(x, y)$ avec $\mathcal{L} = f + \lambda g$.¹ Or \mathcal{L} combinaison linéaire de fonctions concave est concave. Donc la stationarité fait de (x^*, y^*) une solution optimale du problème du Lagrangien, et donc, en suivant du programme d'optimisation original.

1. En effet, $\mathcal{L}_x = f_x - (f_x/g_x)g_x = 0$ et $\mathcal{L}_y = f_y - (f_y/g_y)g_y = 0$.

Exemple

Chercher la solution, en admettant que $f = xy$ est quasiconcave, de :

$$\begin{array}{ll} \max_{x,y \geq 0} & xy \\ \text{S.c.} & 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{array}$$

$$f = xy, f_x = y, f_y = x$$

$$g = 1 - x^2 - y^2, f_x = -2x, f_y = -2y$$

$f_x/g_x = y/-2x$ et $f_y/g_y = x/-2y$. (x, y) est stationnaire si :

$$y/-2x = x/-2y \iff y^2 = x^2 \iff y = x$$

La contrainte est par ailleurs saturée. Ce qui permet de calculer la valeur de x :
 $1 - x^2 - x^2 = 0$, soit $2x^2 = 1$, $x = \sqrt{2}/2$. Donc $y = \sqrt{2}/2$

On a déjà vu que $g = 1 - x^2 - y^2$ était quasiconcave, $f = xy$ est quasiconcave, le résultat précédent permet de conclure $x^* = 1, y^* = 1$.

Optimisation avec f quasiconcave et contraintes convexes

Le résultat suivant ressemble au précédent. Il le généralise néanmoins, quand il y a plusieurs contraintes et qu'on peut démontrer que la/les contraintes définissent un ensemble convexe.

Théorème d'optimisation avec objectif quasiconcave et contrainte convexe

Etant donné f *quasiconcave*, si l'ensemble $g(x, y) \geq 0$ est convexe, alors (x^*, y^*) intérieur au domaine maximise $f(x, y)$ s.c. $g(x, y) = 0$ si et seulement si (x^*, y^*) est stationnaire.

Exemple

En admettant que $f = xy$ est quasiconcave, chercher la solution, de :

$$\begin{array}{ll} \max_{x,y \geq 0} & xy \\ \text{S.c.} & 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{array}$$

C'est l'exemple précédent, mais ici, on remarque que l'ensemble $\{1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ qui est un quart de disque est un ensemble convexe.

On vérifie que le point $(1, 1)$ est stationnaire.

On applique donc le théorème précédent pour dire que le point $(x, y) = (1, 1)$ qui est stationnaire est la solution du programme

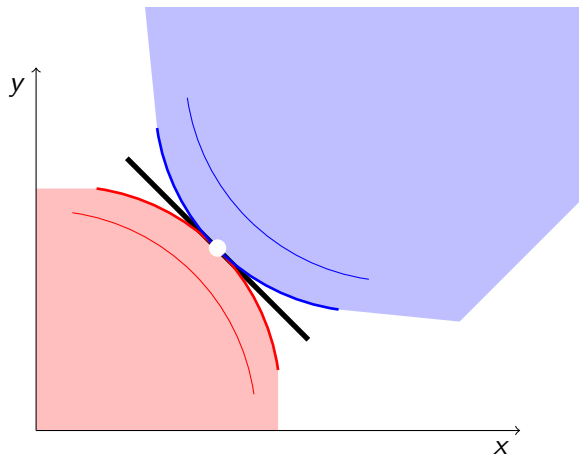
Théorème d'optimisation par séparation

Etant donné deux fonctions f et g quasi-concaves, on dit que (x^*, y^*) maximise $f(x, y)$ s.c. $g(x, y) \geq 0$ si et seulement si il existe un vecteur (p_x, p_y) tels que

(x^*, y^*) maximise $p_x x + p_y y$ sous la contrainte $g(x, y) \geq 0$

(x^*, y^*) minimise $p_x x + p_y y$ sous la contrainte $f(x, y) \geq f(x^*, y^*)$

Optimisation par séparation : représentation



La tangente est la droite d'équation $p_x x + p_y y = p_x x^* + p_y y^*$

En pratique

- 1) Aiguiser votre bon sens pour dire si la contrainte est saturée ou non
- 2) Chercher les points stationnaires (on calculera les dérivées de la fonction objectif et de la contrainte, ou, on écrira le Lagrangien)
- 3) Chercher les conditions suffisantes adéquates

Chapitre III - Section 2 - partie B

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

4. Généralisation à des programmes avec plusieurs contraintes

Types de programme

On étudie des programmes typiquement comme

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x, y) \\ \text{s.c.} \quad & g(x, y) \geq 0 \\ & h(x, y) \geq 0 \end{aligned}$$

Pour ces programmes, on définit le Lagrangien, avec un multiplicateur par contrainte. Ici :

$$\mathcal{L} = f(x, y) + \lambda g(x, y) + \mu h(x, y)$$

Théorème de Kuhn et Tucker

Théorème

Si (x^*, y^*) est solution du programme $\max f(x, y) \quad \text{s.c.} \quad g(x, y) \geq 0$ et $h(x, y) \geq 0$, alors Les dérivées du Lagrangien par rapport aux variables x et y s'annulent. Les conditions (6) définissent un point stationnaire.

$$\mathcal{L}_x = 0 \quad \mathcal{L}_y = 0 \quad (6)$$

Par ailleurs, pour chaque contrainte i ,

- soit la contrainte est saturée, et alors $\lambda_i \geq 0$,
- soit la contrainte n'est pas saturée, et alors, $\lambda_i = 0$

► Les conditions sur les multiplicateurs ne sont pas très surprenantes, puisque on ne prend en compte la contrainte que lorsqu'elle est saturée.

Mêmes conditions suffisantes

Soit (x^*, y^*) un point stationnaire, alors, (x^*, y^*) est la solution du programme $\max f(x, y)$ s.c. $g(x, y) \geq 0$ et $h(x, y) \geq 0$ si f est quasi-concave, et si les contraintes forment un ensemble convexe.

Sélection adverse

Un Principal cherche à entretenir une relation avec un agent, mais il ne connaît pas une des importantes caractéristiques de l'agent, qui est pertinente pour le contrat. On montre que dans ces environnements, le Principal va proposer à l'agent deux contrats, un adapté à chacun de ses types, et l'agent, en choisissant le contrat qu'il préfère, va révéler son information. On dit que le Principal met en place un « mécanisme »

Par exemple si on reprend le Principal qui cherche à faire produire une quantité q contre une rémunération t à un agent dont le coût est $c = \frac{1}{2\theta} q^2$, le caractère α , carte de visite de la productivité de l'agent est essentiel pour l'écriture du contrat.

Si le Principal ne sait pas s'il a affaire à un agent de type α ou un agent de type β , plutôt que de proposer un contrat à un mix de ces deux agents, cad un agent virtuel dont la caractéristique serait par exemple $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, il va proposer le menu $\{(q_\alpha, t_\alpha), (q_\beta, t_\beta)\}$ tel que l'agent choisira ce qu'il y a de mieux pour lui.

Contraintes de Participation et contraintes de révélation

Sous l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = +\infty$ Le programme du Principal est alors

$$\max_{q_1, t_1, q_2, t_2} \frac{1}{2}(q_1 - t_1) + \frac{1}{2}(q_2 - t_2) \quad (O)$$

$$\text{s.c. } t_1 \geq q_1^2 + \underline{w} \quad t_2 \geq \underline{w} \quad (P)$$

$$t_1 - q_1^2 - \underline{w} \geq t_2 - q_2^2 - \underline{w} \quad t_2 - \underline{w} \geq t_1 - \underline{w} \quad (R)$$

Les deux premières contraintes sont des contraintes de Participation

Les deux secondes contraintes sont des contraintes de Révélation

On appelle $\alpha = \frac{1}{2}$ le mauvais type, et $\beta = +\infty$ le bon type. (il a un coût nul).

L'objectif de ce modèle est de trouver le contrat optimal ; plusieurs étapes intermédiaires :

- la contrainte de participation du mauvais type est saturée (pas celle du bon type)
- la contrainte de révélation du bon type est saturée (pas celle du mauvais type)

Chapitre III - Section 2 - partie C

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

Principe

Si un problème de gestion fait apparaître comme central une décision d'un des agents économiques, alors la condition première du problème (la FOC) sera souvent considérée comme une des équations expliquant le problème considéré.

Exemple : comportement optimal de la firme en CPP

Considérons le programme de la firme en CPP :

$$\begin{array}{ll} \max_q & pq - C(q) \\ \text{S.c.} & pq - C(q) \geq 0 \\ & q \geq 0 \end{array}$$

On sait que la contrainte n'est génériquement pas saturée, ce programme est équivalent au programme non contraint dont la condition première est

$$p = C_m$$

et on le sait, cette célèbre équation est une des emblèmes du chapitre sur la concurrence, c'est l'expression de l'offre du marché.

Exemple : comportement optimal du monopole

Considérons le programme du monopole :

$$\begin{array}{ll} \max_q & pq - C(q) \\ \text{S.c.} & p(q) - p \geq 0 \end{array} .$$

On sait que la contrainte est saturée, la firme prenant en compte la demande dans son offre. On a $A_q = p - C'(q)$, $A_p = q$, $B_q = p'(q)$, $B_p = -1$, la condition première est donc

$$(p - C'(q))/p'(q) = q/p - 1 \quad \text{équivalent à} \quad \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{1}{\varepsilon}$$

la célèbre équation entre le pouvoir de marché du monopole et l'inverse de l'élasticité de la demande par rapport au prix du bien, la caractéristique du comportement du monopole.

Chapitre III - Section 2 - partie D

1) Les conditions nécessaires spécifiques, quand la contrainte est saturée

- Définitions et questions de méthode
- Conditions nécessaires dites « premières » ou FOC
- Conditions pour la saturation de la contrainte
- Utilisation de la méthode de Lagrange

2) Les conditions suffisantes, Interprétations, statique comparative

- Quelques conditions suffisantes dans le cas d'une contrainte
- Cas avec plusieurs contraintes : le théorème de Kuhn et Tucker
- Interprétation, rôle structurel des FOC
- Statique comparative : le théorème de l'enveloppe

La valeur d'une fonction qu'on a maximisée

Dans les problèmes d'optimisation qu'on aborde en Gestion, suivant le contexte, on placera l'accent

- soit sur les outils, les variables qui permettent d'atteindre le maximum
- soit sur la fonction objectif maximisée

Dans le second cas, on pourra s'intéresser aux variations de la fonction objectif qui a été maximisée. Par exemple, si on s'intéresse à la maximisation de f , on pourra noter F la *valeur* de la fonction qui a été maximisée

Objet de la statique comparative : la fonction F

$$F(a) = \max_{x,y} f(x,y,a) \\ \text{s.c. } g(x,y) \geq 0$$

Théorème de l'enveloppe pour un programme avec contrainte (cas simple)

Dans le cas où seule la fonction objectif dépend de a :

Théorème de l'enveloppe (cas simple)

Si $f(x, y, a)$ est une fonction dont on a trouvé pour différentes valeurs du paramètre a , la valeur optimale $F(a) = \max_{x,y} f(x, y, a)$, s.c. $g(x, y) \geq 0$, alors, on peut déduire facilement les variations de F de la formule suivante :

$$F'(a) = f_a(x^*(a), y^*(a), a)$$

Où x^* et y^* désignent les outils qui ont permis d'atteindre le maximum.

En pratique, on dérive les fonctions f et g par rapport à a et on donne la valeur de cette fonction en remplaçant x et y par la solution $x^*(a), y^*(a)$

Théorème de l'enveloppe pour un programme avec contrainte (cas général)

Dans le cas où f ET g dépendent du paramètre a

Théorème de l'enveloppe (cas général)

Si $x^*(a), y^*(a)$ sont les solutions pour différentes valeurs du paramètre a , du programme optimal $F(a) = \max_{x,y} f(x,y,a)$ s.c. $g(x,y,a) \geq 0$, alors, on peut déduire facilement les variations de F de la formule suivante :

$$F'(a) = f_a(x^*(a), y^*(a), a) + \lambda g_a(x^*(a), y^*(a), a)$$

Où x^* et y^* désignent les outils qui ont permis d'atteindre le maximum et λ le multiplicateur de Lagrange.

En pratique, on dérive les fonctions f et g par rapport à a et on donne la valeur de cette fonction en remplaçant x et y par la solution $x^*(a), y^*(a)$. Il est nécessaire dans ce cas général de connaître la valeur de λ .

Pour mettre en oeuvre le théorème de l'enveloppe, il convient

- 1 dans un premier temps de résoudre le programme non contraint
- 2 puis de dériver la fonction objectif (et éventuellement la fonction contrainte) par rapport au paramètre considéré
- 3 et de calculer la dérivée de f en remplaçant x et y par la solution $x^*(a), y^*(a)$ dans f , et éventuellement, si la contrainte dépend du paramètre d'ajouter λ fois la dérivée de g en remplaçant x et y par la solution $x^*(a), y^*(a)$ dans g .

Exemple : dépense minimum d'un ménage

Soit un ménage dont on connaît la fonction d'utilité $U = xy$, et dont on cherche le minimum de revenu nécessaire qu'il lui faut pour avoir l'utilité du panier de bien

(1, 1) : une unité de chaque bien. Le programme est
$$R = \min_{x,y} p_x x + p_y y$$
 s.c. $xy \geq 1$

Si on recherche la dérivée de ce revenu par rapport à p_x , c'est la forme simple du théorème de l'enveloppe qui s'applique, il faut qu'on trouve la valeur de la dérivée de la fonction objectif par rapport à p_x , soit, ici, x en substituant x par le x optimal. Il s'agit dans un premier temps de résoudre le programme optimal.

≡ Comme en dehors de (0,0) qui est un minimum, $A_x > 0$ ou $A_y > 0$, la contrainte est saturée : $xy = 1$.

○ La FOC : $y/p_x = x/p_y$, soit $p_x x = p_y y$.

⊕ la solution de ces deux équations : $x = \sqrt{p_y/p_x}$, $y = \sqrt{p_x/p_y}$

La dérivée recherchée est : $R_{p_x} = \sqrt{p_y/p_x}$

ζ Interprétation : Cette dérivée est d'autant plus faible que p_x est grand. C'est assez intuitif, mais un raisonnement pas si simple : quand p_x est grand, on donnera peu de bien x à l'agent. Ainsi, l'augmentation de son prix n'aura que peu d'impact sur le revenu à allouer à l'agent pour obtenir l'utilité $U(1,1)$.