Outils Maths d'Aide à la Décision

Chapitre II
La maximisation d'une fonction avec une ou deux variables, sans contrainte

où l'on présente la maximisation d'une fonction, avec une ou deux variables, sans contrainte ; rôle essentiel de la convexité

Automne 2021

Université de Tours - A. Chassagnon

Optimisation

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

- *La Gestion comme l'Économie étudient de manière formelle les programmes d'optimisation, en s'intéressant, en fonction du contexte soit à la valeur maximale, soit à la valeur de l'instrument qui permet d'obtenir cette valeur. Un second sujet est ensuite d'étudier la statique comparative, c'est à dire la modification des valeurs maximales avec un changement des paramètres.*

Plan du cours

1) Maximisation d'une fonction d'une variable
2) Maximisation d'une fonction de deux variables
3) Statique comparative - Théorème de l'enveloppe
4) Reprise des application classiques

1. Maximisation d’une fonction d’une variable

Programme de maximisation d'une fonction réelle

Soit $f(\cdot)$ une fonction réelle, définie sur un ensemble fermé A.

Définition

On appelle maximum de la fonction sur A, la valeur maximale que la fonction peut atteindre. Le programme est le suivant

$$\max_x \quad f(x) \tag{1}$$

Par extension, on appellera parfois maximum la valeur de la variable (de l'outil) pour laquelle la fonction atteint son maximum.

- Souvent, en Économie-Gestion, la fonction dont on analyse le maximum dépend d'un paramètre. On fait apparaître ce paramètre dans le programme : $\max_x \quad f(x, a)$

Condition nécessaire de l'optimum

Théorème

Si x^* est une solution *intérieure* du programme (**??**), alors

$$f'(x) = 0, \tag{2}$$

On appelle Condition première cette condition.

- Attention, cette condition *nécessaire* n'est pas suffisante.

- Ce théorème indique la marche à suivre, quand on a un programme d'optimisation simple : rechercher et écrire la condition première.

- Enfin, quand il n'existe pas de solution intérieure au programme de maximisation, on dit que cette dernière est « en coin ».

Exemples de conditions premières

Donner les conditions premières de l'optimum pour les différents programmes suivants :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} x - x^2 \qquad \max_{x \in \mathbb{R}_+} 2x^2 - \sqrt{x} \qquad \max_{x \in \mathbb{R}_+} x * \ln(x)$$

Exemples de conditions premières

Donner les conditions premières de l'optimum pour les différents programmes suivants :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} x - x^2 \qquad \max_{x \in \mathbb{R}_+} 2x^2 - \sqrt{x} \qquad \max_{x \in \mathbb{R}_+} x * \ln(x)$$

$f = x - x^2$	On a : $f'(x) = 1-2x$, la FOC est $1-2x = 0$, soit $x = 1/2$.
$f = 2x^2 - \sqrt{x}$	On a : $f'(x) = 4x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, la foc est $x\sqrt{x} = 1/8$, soit $(\sqrt{x})^3 = (1/2)^3$, équivalent à $\sqrt{x} = 1/2$, $x = 1/4$
$f = x\ln(x)$	On a : $f'(x) = x/x + \ln(x)$, la foc est $\ln(x) = -1$, soit $x = 1/e$. ATTENTION : ceci correspond à un minimum de la fonction

Résolution complète par un tableau de variation

Une première méthode pour résoudre complètement les exemples précédents est de faire un tableau de variation dans chacun des cas

Résolution complète par un tableau de variation

Une première méthode pour résoudre complètement les exemples précédents est de faire un tableau de variation dans chacun des cas

Premier exemple : $f = x - x^2$ **;** $f'(x) = 1 - 2x$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	$-\infty$

La solution des FOC correspond donc bien à un maximum.

▶ On s'en doutait, car à $+\infty$ (comme à $-\infty$) le terme $-x^2$ l'emportait dans le négatif

Continuons avec les deux derniers exemples. Etablissons leur tableaux de variations.

2e exemple : $f = 2x^2 - \sqrt{x}$

$f' = 4x - 1/2\sqrt{x}$

x	0		$1/4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3/8$	$\nearrow$	$+\infty$

3e exemple : $f = x\ln(x)$

$f' = 1 + \ln(x)$

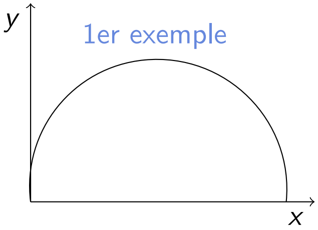
x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

ATTENTION Quand on ne vérifie pas, il est possible d'avoir caractérisé un minimum plutôt qu'un maximum.

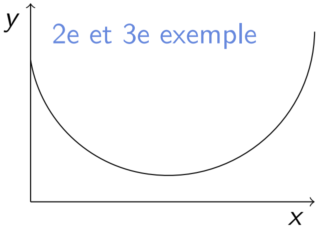
Ceci peut être très dommageable en Gestion, on caractérise ce qu'il ne faut pas faire !

Ce qui diffère entre le maximum et le minimum

À supposer qu'on ait un seul point en lequel la condition première est vérifiée. Ce qui diffère les différents cas se représente tout d'abord dans un graphique.



L'objectif est concave



L'objectif est convexe

- D'où une condition suffisante pour l'optimum : que la fonction objectif soit concave, autrement dit, $f'' \leq 0$.

Fonction objectif localement concave

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante, pour qu'un extremum soit un maximum local est que la fonction objectif soit localement concave, cad que sa dérivée seconde est négative ou nulle ($f'' \leq 0$). On appelle cette condition « condition seconde ».

Preuve Pour savoir si on a atteint un extremum local est de regarder les variations de la fonction *autour de* x.

- considérons *l'approximation linéaire* de f autour de x, $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx$. Une condition nécessaire pour avoir un maximum est d'avoir $f'(x) = 0$ (sinon, on trouverait dx tel que $f(x) + f'(x)dx > f(x)$)
- considérons *l'approximation quadratique* de f autour de x, $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2 = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2$. Une condition nécessaire pour avoir un maximum est d'avoir $f''(x) \leq 0$ (sinon, on trouverait dx tel que $f(x) + f''(x)dx > f(x)$). $\underline{f''(x) < 0 \text{ est une condition suffisante}}$

Résumé et méthode pratique

Quatre étapes à poursuivre pour établir le maximum *intérieur* d'une fonction d'une variable réelle,

1) Calculer la dérivée de f, cad $f'(x)$
2) Calculer la dérivée seconde de f, cad $f''(x)$
3) Ecrire et Résoudre la condition première $f'(x) = 0$
4) Vérifier que pour toutes les solutions de l'étape précédente, les conditions secondes sont vérifiées, cad $f'' \leq 0$.
5) Si les conditions secondes ne sont pas vérifiées, il faudra trouver un argument particulier pour poursuivre l'analyse, et conclure sur le maximum de la fonction qui sera alors obligatoirement « en coin ».

2. Maximisation d'une fonction de deux variables

Soit $f(x, y)$ une fonction réelle, définie sur un ensemble fermé $X \times Y$.

Définition

On appelle maximum de la fonction f sur $X \times Y$, la valeur maximale que la fonction $f(x, y)$ peut atteindre. Le programme est le suivant

$$\max_{x,y} \quad f(x, y) \tag{3}$$

Par extension, on appellera parfois maximum la valeur de l'outil (x, y) pour lequel la fonction atteint son maximum.

Condition nécessaire de l'optimum

Théorème

Si (x^*, y^*) est une solution *intérieure* du programme (**??**), alors

$$f_x(x^*, y^*) = 0, \qquad f_y(x^*, y^*) = 0, \tag{4}$$

C'est-à-dire que les deux dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ s'annulent. On appelle Conditions premières ces conditions.

Preuve Il suffit de considérer deux programmes annexes, dont on déduit immédiatement les conditions. En effet,

- x^* est le maximum du programme d'une variable $\max_x f(x, y^*)$; d'où la condition première $f_x(x^*, y^*) = 0$
- y^* est le maximum du programme d'une variable $\max_y f(x^*, y)$; d'où la condition première $f_y(x^*, y^*) = 0$

Exemples de conditions premières

Conditions nécessaires de l'optimum pour les programmes suivants :

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} xy - (xy)^2 \qquad \max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \sqrt{xy} - 2(x+y)^2$$

Exemples de conditions premières

Conditions nécessaires de l'optimum pour les programmes suivants :

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} xy-(xy)^2 \qquad \max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \sqrt{xy}-2(x+y)^2$$

$f = xy-(xy)^2$

On a : $f_x = y-2xy^2$ et $f_y = x-2x^2y$. Les FOC sont donc $1-2xy=0$. Les conditions premières sont réalisées quand $xy = 1/2$.

On pourrait ici se ramener à un programme d'une seule variable où l'on cherche la valeur de xy...

$f = \sqrt{xy}-2(x+y)^2$

On a : $f_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}-4(x+y)$ $f_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-4(x+y)$. Lorsque les deux FOCS sont vérifiées simultanément, alors $\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, soit $x=y$ condition nécessaire. La FOC $f_x = 0$ se réécrit alors $4*2x = 1/2$, soit $x = 1/16$ $y = 1/16$

Conditions suffisante : $f(x, y)$ concave

Là encore, recours à la concavité de la fonction, synonyme d'une condition sur les dérivées seconde de la fonction $f(x, y)$.

Théorème

Si (x^*, y^*) vérifient les conditions premières, et aussi, les deux conditions suivantes, dites «conditions secondes»,

$$\begin{aligned} f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 &> 0 \\ f_{xx} < 0 \quad , \quad f_{yy} &< 0 \end{aligned} \tag{5}$$

alors (x^*, y^*) est un maximum de f

Seconde équation facile et intuitive : elle désigne la concavité de f par rapport à x (et à y), ce qu'on imaginait déjà comme une condition à vérifier

Première équation à retenir Pour la vérifier, calculer f_{xx}, f_{yy} et f_{xy}. La condition est connue comme : "le déterminant de la matrice Hessienne est positif"

Conditions secondes pour les deux exemples

$f = xy - (xy)^2$

On a : $f_x = y - 2xy^2$ et $f_y = x - 2x^2y$. Dérivées secondes : $f_{xx} = -2y^2 < 0$, $f_{yy} = -2x^2 < 0$, $f_{xy} = 1 - 4xy$. $D = 4x^2y^2 - (1-4xy)^2$. Quand $2xy = 1$, On vérifie $D = 0$. On ne peut a priori rien conclure en appliquant le théorème précédent. Cependant, la remarque émise lors du calcul des FOC reste valide, on doit analyser ce programme comme le programme d'une seule variable, d'où l'on conclut qu'on est à l'optimum.

$f = \sqrt{xy} - 2(x+y)^2$

On a : $f_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 4(x+y)$ $f_y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} - 4(x+y)$. Remarquons avant d'aller plus loin que L'application des FOC conduit à $x = y$ $f_{xx} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 4 < 0$, $f_{yy} = -\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}} - 4 < 0$, $f_{xy} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} - 4$. On calcule D uniquement dans le cas $x = y$, on remarque $f_{xx} = f_{yy} = -1/4x - 4$ et $f_{xy} = 1/4x - 4$ donc $D = (f_{xx})^2 - (f_{xy})^2 = (f_{xx} + f_{xy})(f_{xx} - f_{xy}) = -8(-1/2x) = 4/x > 0$.
Les conditions secondes sont vérifiées, les solutions du programme optimal sont les solutions des FOC, $x = y$ tel que $1/2 = 8x$, soit $x = y = 1/16$

En pratique

- Quand vous avez à chercher le maximum absolu d'une fonction F Vous devez suivre les cinq étapes suivantes :

1. Calculer 5 dérivées, F_X, F_{XX}, F_Y, F_{YY} et F_{XY}
2. Ecrire les FOC, puis les résoudre en trouvant X et Y
3. Calculer le déterminant de la matrice Hessienne $\Delta = F_{XX}F_{YY} - (F_{XY})^2$
4. Vérifier que les conditions secondes s'appliquent
5. CONCLURE

Un exemple pour s'entrainer

- Trouver le maximum absolu de la fonction $F = pq - p^2 - 3q^2$

Les cinq dérivées :

$F_p = q - 2p,\ F_{pp} = -2 < 0,$

$F_q = p - 6q,\ F_{qq} = -6 < 0,$

$F_{pq} = 1$

$\Delta = (-2) * (-6) - (1)^2 = 11 > 0$

Les conditions secondes s'appliquent, à savoir $F_{pp}, F_{qq} < 0$ et $\Delta > 0$

Les conditions premières s'écrivent $q - 2p = 0$ et $p - 6q = 0$.

Le système obtenu est $\left\{ \begin{array}{ccc} q & = & 2p \\ p & = & 6q \end{array} \right.$, soit par substitution de q dans la seconde équation $p = 6(2p)$, soit $11p = 0$, $p = 0$ $q = 0$.

- La fonction F est maximale pour $p = q = 0$. Elle vaut alors zéro. Sinon, partout ailleurs, elle est négative.

Récapitulatif : les questions à traiter pour un problème d'optimisation

- Étape préalable : se demander si la fonction considérée est bornée supérieurement, cette question vous permettra de répondre si oui ou non il est pertinent de commencer à chercher le maximum de la fonction

  PUIS

- Recherche méthodique du maximum de la fonction, en utilisant les cinq étapes précédentes.

On rappelle qu'une fonction est dite *bornée supérieurement* dès lors que l'on peut trouver (au moins) une borne supérieure e deçà de laquelle la fonction reste toujours en dessous. Remarque : cette borne peut être bien au-dessus de la fonction, mais être aussi une sorte de valeur limite.

3. Statique comparative

La valeur d'une fonction qu'on a maximisée

Dans les problèmes d'optimisation qu'on aborde en Gestion, suivant le contexte, on placera l'accent

- soit sur les outils, les variables qui permettent d'atteindre le maximum
- soit sur la fonction objectif maximisée

Dans le second cas, on pourra s'intéresser aux variations de la fonction objectif qui a été maximisée. Par exemple, si on s'intéresse à la maximisation de f, on pourra noter F la *valeur* de la fonction qui a été maximisée

Objet de la statique comparative : la fonction F

$$F(a) = \max_x \; f(x, a)$$

Théorème de l'enveloppe pour une fonction maximisée par le choix d'une variable x

Théorème de l'enveloppe

Si $f(x, a)$ est une fonction dont on a trouvé pour différentes valeurs du paramètre a, la valeur optimale $F(a) = \max_x f(x, a)$, alors, on peut déduire facilement les variations de F de la formule suivante :

$$F'(a) = f_a(x^*(a), a).$$

Où x^* désigne le x qui a permis d'atteindre le maximum.

En pratique, on dérive la fonction objectif f par rapport à a et on donne la valeur de cette fonction en remplacementçant x par la solutiion $x^*(a)$

Profit d'1 firme en CPP, dépendant du prix de l'input

Énoncé Soit une firme en CPP dont la fonction de coût $C(q) = wq^2$ où w désigne le coût de l'input. Calculer la variation du profit en fonction du prix w, puis l'élasticité du profit au prix de l'input.

Choix optimal de q la production est optimale quand $C_m = p$, soit, $2wq = p$, $q^* = \frac{1}{2w}p$. Valeur du profit correspondante : $\pi^* = p\left(\frac{1}{2w}p\right) - w\left(\frac{1}{2w}p\right)^2 = \frac{1}{4w}p^2$.

Calcul de $\partial\pi^*/\partial w$, direct si on reprend le calcul de π^*, on trouve $\partial\pi^*/\partial w = \dfrac{-1}{4w^2}p^2$

Calcul de $\partial\pi^*/\partial w$, par THM Enveloppe On a $\pi(q, w) = pq - wq^2$. La dérivée par rapport à w est $\pi_w = -q^2$, et donc, $\partial\pi^*/\partial w = -\left(q^{\star 2}\right) = \dfrac{-1}{4w^2}p^2$

4. Reprise des problèmes classiques

En pratique

Il s'agit de bien circonscrire le problème d'optimisation.

On rappelle que les trois éléments d'un problème d'optimisation sont :

1. Les variables dont on doit déterminer la valeur
2. La fonction objectif qui s'exprime en fonction de ces variables et d'autres variables qui jouent le rôle de paramètres
3. s'il y en est, des contraintes

▶ Toujours prendre l'habitude de bien formuler les programmes, avec grande précision

Profit d'1 firme en CPP dont on connaît le coût

Le problème de la firme en CPP est un problème de maximisation avec UNE variable :

$$\max_q pq - C(q)$$

La FOC est

$$p = C'(q)$$

- Cette condition, formulée dans le cas général, est intéressante en soi, avec toutes les interprétations qu'on connaît

- On peut bien entendu utiliser la même méthode dans un problème plus spécifique dans lequel on a donné une forme plus spécifique à la fonction de coût

Profit du monopole dont on connaît le coût

Le problème de la firme en Monopole est un problème de maximisation avec DEUX variables, mais qui comprend aussi une contrainte :

$$\begin{array}{rl} \max_{p,q} & pq - C(q) \\ s.c. & q \leq D(p) \end{array}$$

▶ On verra comment résoudre ce type de problème dans le prochain chapitre. Nous avons vu, provisoirement, dans le chapitre d'introduction qu'on pouvait, après avoir analysé que la contrainte devait s'écrire avec égalité, substituer une variable à une autre afin de se ramener à un problème de maximisation sans contrainte. Mais ce n'est pas toujours la meilleure approche.

Régulation d'un monopole public

- L'histoire : un Principal veut faire produire à une firme une quantité q en échange d'un transfert. L'objectif de ce Principal est $q - t$. La firme fait face à un coût de production $C(q, \theta) = \frac{1}{2\theta} q^2$. Son objectif est $t - C$.

- Le programme : Lorsqu'on considère que le Principal a la main, il va choisir q et t dans le Programme suivant :

$$\begin{array}{rl} \max_{q,t} & q - t \\ s.c. & t \geq \frac{1}{2\theta} q^2 \end{array}$$

La résolution de ce programme sera étudiée dans le prochain chapitre. Il est cependant possible (i) de démontrer que nécessairement à l'optimum la contrainte est saturée, et de transformer ce programme en un programme sans contrainte avec une variable.