Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Corrigé du TD n° 1

nombres : decimaux - pourcentages - fractions - reels - puissance et logarithmes, développements et factorisations

Automne 2021

1 Pourcentages

1) Dans une assemblée de 50 personnes, il y a 31 femmes. Quel est le pourcentage des femmes dans cette assemblée ?

La proportion de femmes est $\frac{31}{50} = \frac{62}{100} = 62\%$

2) Si une assemblée de 120 personnes compte 15 % de femmes, combien y-a-t'il de femmes dans cette assemblée ?

Le nombre de femmes est $15\% * 120 = \frac{15}{100} * 120 = \frac{15}{5} * 6 = 3 * 6 = 18$

3) Le prix hors taxes d'un objet est 120 €. Le taux de TVA est de 5 %. Calculer la TVA et le prix TTC.

la TVA est $5\% * 120 = \frac{5}{100} * 120 = \frac{5*20}{100} * 6 = 6$

4) Le prix TTC d'un objet est de 198 €. Le taux de TVA est de 20 %. Calculer la TVA et le prix HT.

On a $1,2HT = 198$**, qu'on peut aussi écrire** $\frac{120}{100}HT = 198$ **dont on déduit** $HT = \frac{198*100}{120} = \frac{198*5}{6} = \frac{99*5}{3} = 33 * 5 = 165$**. On en déduit** $TVA = 198 - 165 = 33$**.**

5) Après une remise de 15 % le prix d'un objet n'est plus que de 34 €. Calculer le prix initial de l'objet.

On a $\frac{85}{100}p = 34$ **dont on déduit :** $p = 3400/85 = 40$

6) Un article étiqueté 120€ est soldé à 100 €. La remise est-elle de 20% ? . . . . OUI ☐ NON ☒

NON car $120 - 24 = 96$

7) Dans une population de 450 personnes, une enquête a montré que 60% sont des femmes et que 70% des femmes aiment le chocolat. Combien y a-t'il de femmes qui aiment le chocolat ? Quelle est leur proportion ? **Il y a** $\frac{6}{10} * 450 = 6 * 45 = 270$ **femmes dans la population, et** $\frac{7}{10} * 270 = 7 * 27 = 189$ **femmes qui aiment le chocolat. La proportion de ces 189 femmes dans la population est** $\frac{6}{10} * \frac{7}{10} = 42\%$**.**

8) Augmenter de 250% une valeur revient à multiplier celle-ci par 3,50 ? . . . . OUI ☒ NON ☐

OUI car $1 + 250\% = 1 + 2,5 = 3,5$

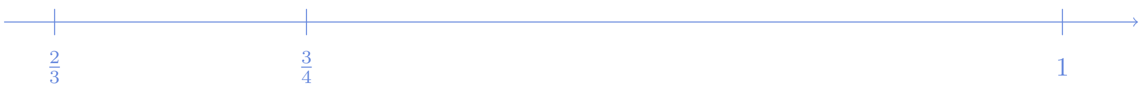
9) si l'altitude d'un plan incliné varie d'un centimètre par mètre parcouru horizontalement, on dit que la pente est de 1 % : *Interpréter* ; CAD, pourquoi on utilise la notion de pourcentage en topographie ?

2 Fractions

1) Après les avoir ordonnées, décomposer en somme d'inverses distincts d'entiers naturels distincts les fractions suivantes :

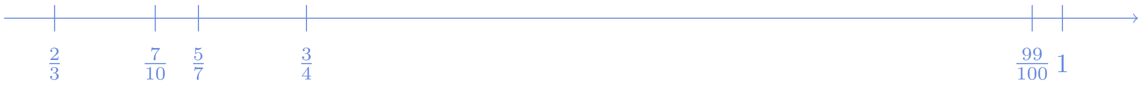
$$3/4 \qquad 99/100 \qquad 7/10 \qquad 2/3 \qquad 1 \qquad 5/7$$

1 est le plus grand nombre. Ensuite, on établit que $2/3 < 3/4$ **par un produit en croix (8<9). On commence déjà à représenter ce premier résultat partiel.**



Ensuite, il faut pour éviter d'avoir à réaliser trop de comparaison savoir où se situent les autres nombres par rapport à 2/3, 3/4 et 1. Clairement 99/100 est au-dessus de 3/4. On peut même tout de suite établir sans vérifier de trop près que 99/100 est le plus grand nombre avant 1. Ensuite, on vérifie, par exemple, par un produit en croix que $3/4 > 7/10$ **et que** $3/4 > 5/7$**. On a aussi, toujours par un produit en croix,** $2/3 < 7/10$ **et** $2/3 < 5/7$**. Ainsi les deux derniers nombres, 7/10 et 5/7 se situent dans l'intervalle en** $]2/3, 3/4[$**. Un dernier produit en croix**

permet d'établir que $5/7 > 7/10$**. Ainsi :** $2/3 < 7/10 < 5/7 < 3/4 < 99/100 < 1$**.**



$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\\
\tfrac{99}{100} &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{25}\\
\tfrac{7}{10} &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}\\
1 &= \tfrac{1}{1}\\
\tfrac{5}{7} &=
\end{aligned}$$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}} \qquad a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+1}}}$$

$$\frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}=\frac{\dfrac{10+9}{15}}{\dfrac{3+2}{6}}=\frac{19}{15}*\frac{6}{5}=\frac{19}{5}*\frac{2}{5}=\frac{38}{25}$$

$$\begin{aligned}
a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{\dfrac{a_2a_3+a_2+1}{a_3+1}}} &= a_0+\frac{1}{a_1+\dfrac{a_3+1}{a_2a_3+a_2+1}}=a_0+\frac{1}{\dfrac{a_1a_2a_3+a_1a_2+a_1+a_3+1}{a_2a_3+a_2+1}}=a_0+\frac{a_2a_3+a_2+1}{a_1a_2a_3+a_1a_2+a_1+a_3+1}\\
&= \frac{a_0a_1a_2a_3+a_0a_1a_2+a_0a_1+a_0a_3+a_0+a_2a_3+a_2+1}{a_1a_2a_3+a_1a_2+a_1+a_3+1}
\end{aligned}$$

3) Résoudre les problèmes que l'on retrouve dans des archives historiques à Babylone, au Moyen-age en Europe et en Chine. Précisez en particulier l'appartenance du nombre trouvé aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

a) J'ai trouvé une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après lui avoir ajouté un septième de son poids et avoir ajouté un onzième du résultat j'ai pesé le tout et j'ai trouvé : 1 ma-na [unité de masse]. Quel était à l'origine le poids de la pierre ? (problème babylonien, tablett YBC 4652, problème 7)

Notons p le poids de la pierre. On a $\frac{8}{7}p*\frac{12}{11}=1$**. D'où** $p=\frac{7}{8}\frac{11}{12}=\frac{77}{96}\in\mathbb{Q}$

b) Un nombre augmenté de son septième donne 19. Quel est ce nombre ? (papyrus Rhind, problème 24)

On a $\frac{8}{7}x=19$**, ce qui donne** $x=\frac{19*7}{8}=\frac{133}{8}\in\mathbb{Q}$

c) Un nombre augmenté de son quart donne 15. Quel est ce nombre ? (papyrus Rhind, problème 26)

On a $\frac{5}{4}*x=15$**, d'où** $x=15*\frac{4}{5}=3*4=12\in\mathbb{N}$**.**

d) Supposons que l'on ait 9 tiges d'or jaune et 11 tiges d'argent blanc qui, à la pesée, ont des poids tout juste égaux. Si l'on échang entre elles une de leurs tiges, l'or devient plus léger de 13 liang [unité de masse]. On demande combien pèsent respectivement un tige d'or et une tige d'argent. (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique, problème 7.17)

Notons O le poids d'une tige d'or et A le poids d'une tige d'argent blanc. On nous dit tout d'abord que $9O=11A$ **Puis** $8O+A=10A+O-13$**. C'est un système de deux équations à deux inconnues. La première équation, on la réécri** $O=\frac{11}{9}A$**. La seconde équation, qu'on a réécrit** $9A-7O=13$ **se réécrit :** $9A-7*\frac{11}{9}A=13$ **ou encore** $\frac{81-7}{9}A=13, \frac{74}{9}A=13$ $A=13\frac{9}{74}=\frac{117}{74}$

e) Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et neuf paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long. (problème médiéval)

On a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$**. Neuf paumes font** $\frac{1}{6}$**. La longueur totale est donc** $6*9=54$**.**

3 Représentation décimale des fractions

1) Indiquer au moins une fraction qui égale 8,789789789789789789...

2) Indiquer le développement décimal de la fraction $\frac{612}{999}$

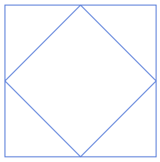
3) Indiquer le développement décimal de la fraction $\frac{68}{111}$

4 Racine de deux

1) Après avoir redonné la définition du nombre $\sqrt{2}$, montrer que la diagonale d'un carré de longueur 1 est justement $\sqrt{2}$. L'étudiant aura le loisir d'utiliser tout moyen formel qui lui plait, un graphique, une équation ou une rédaction.

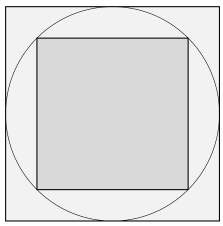
On peut invoquer le théorème de Pythagore, on a $1^2+1^2 = D^2$, où D est la diagonale, cad $D^2 = 2$, et par définition $D = \sqrt{2}$

On peut aussi regarder le carré dans le carré, comme dans la figure suivante. Par convention on dit que le petit carré est de longueur 1. La longueur du grand carré est exactement la diagonale du petit carré.



Or on se convainc assez vite que la surface du grand carré est deux fois la surface du petit carré (imaginez un pliage). On a alors $D * D = 2 * 1 * 1$ d'où $D^2 = 1$ et $D = \sqrt{2}$.

2) Il est en outre possible, à l'aide d'un cercle, de dupliquer un carré en un autre carré du double de sa surface sans en changer l'orientation. Ci-dessous la surface du grand carré double celle du petit carré.



Montrer formellement en deux trois phrases pourquoi le rapport des côtés des deux carrés est de $\sqrt{2}$. **C'est le même argument qui a été développé dans la question précédente**

3) Reprendre et achever la preuve suivante selon laquelle $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction, à partir d'un argument de parité. (on développera la contradiction).

> Soient p et q entiers > 0 tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduit $p^2 = 2q^2$. Choisissons p et q, avec p le plus petit possible. L'entier p est alors pair puisque son carré l'est. En effet il serait sinon impair et le carré d'un nombre impair est impair. On peut alors écrire $p = 2r$, avec r entier naturel. En simplifiant par 2, l'équation précédente se réécrit $q^2 = 2r^2$. D'où une contradiction. **Développer la contradiction**
>
> **On note d'abord que $q > p$, et quand on écrit $q^2 = 2r^2$ on a écrit une équation du même type que l'équation $p^2 = 2q^2$, mais avec, en terme de gauche, un terme plus petit $(q < p)$, ce qui contredit la minimalité dans le choix de p qui avait été pris comme convention dans la preuve.**

4) Soit l'ensemble des nombres entier qui vérifient la Propriété **(P)** selon laquelle lorsqu'ils sont multipliés par $\sqrt{2}$, ils demeurent un entier. **De tels nombres existeraient si $\sqrt{2}$ était une fraction**

a) Montrer que si x vérifie la Propriété **(P)**, alors $x\sqrt{2} - x$ vérifie aussi la Propriété **(P)** ;

x vérifie la propriété (P), çà veut dire par définition que $x\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Est-ce vrai aussi de $x\sqrt{2} - x$? Multiplions c dernier nombre par $\sqrt{2}$: on trouve $x * 2 - x\sqrt{2}$, cad la différence de deux entiers naturels, dont le premier est plu grand : cette différence reste un entier naturel. Dit autrement $x\sqrt{2} - x$ vérifie la propriété (P).

b) en déduire que le seul nombre entier qui vérifie la Propriété **(P)** est 0, en étudiant le plus petit entier naturel positif qui vérifierait la Propriété **(P)** ; **Si on considère $x > 0$ qui vérifie la propriété (P) et qui est le plus petit entier positif qui vérifie cette propriété, alors on sait que $x\sqrt{2} - x \in \mathbb{N}$ qui est plus petit que x vérifie aussi cette propriété. On en déduit alors que $x\sqrt{2} - x = 0$ et donc que $x = 0$, une contradiction. Cela achève de montrer que aucun nombre entier différent de zéro ne vérifie la Propriété (P). On vérifie enfin que 0 vérifie la propriété (P)**

c) en déduire que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ était rationnel, alors il existerait deux nombres p et q positifs strictement tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduirait que q vérifie la propriété (P), ce qui n'est pas possible d'après ce qui précède puisque $q > 0$. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

5 Puissances et Logarithmes

1) (a) Simplifier $\sqrt{\frac{a^4}{b^5}}$ (b) Comparer 100^{102} et 102^{100} (On commencera par simplifier le problème)

(a) On écrit la fraction sous forme d'une puissance, ce qui permet ensuite de simplifier en appliquant les règles de calcul spécifiques au puissances. Il est demandé que tout étudiant sache bien réaliser ces opérations, qui apparaissent souvent en gestion

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^5}} = \left(\frac{a^4}{b^5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{4*\frac{1}{2}}}{b^{5*\frac{1}{2}}} = a^2 b^{-5/2}$$

(b) On peut tenter tout de suite de sortir le tableur ou la calculette, voilà ce qu'on obtient :

100^{102}	**1E+204**
102^{100}	**7,2446E+200**

Bon, le premier nombre est supérieur au second, mais vous pourriez ne pas être à l'aise avec cette notation scientifique (qu'on utilise très peu voire jamais en Gestion), et donc tenter, ce que je vous propose de simplifier un peu le problème, avant d'établir la comparaison. Je vous propose deux manières de simplifier, et ensuite de passer à la calculette/tableur.

MÉTHODE 1 Plutôt que de comparer ces deux très gros nombres, on compare leur logarithme. Ainsi, il y a à comparer $102 \ln(100)$ et $100 \ln(102)$. Vous pouvez alors utiliser le tableur et conclure que $100^{102} > 102^{100}$:

102*LN(100)	**469,727359**
100*LN(102)	**462,4972813**

MÉTHODE 2 On peut chercher une méthode plus spécifique à ce problème, en remarquant que $102^{100} = 100^{100} * 1,02^{100}$. En simplifiant donc les deux nombres à comparer par 100^{100}, il revient à comparer 100^2 et $1,02^{100}$, ou, en passant au logarithme, $2 \ln(100)$ et $100 \ln(1,02)$. Là encore, on fait intervenir le tableur, pour la même conclusion :

2*LN(100)	**9,210340372**
100*LN(1,02)	**1,98026273**

2) Une firme produit un bien à partir du facteur travail noté L. Plus elle utilise de ce facteur de production L, plus elle produit. Plus précisément, sa fonction de production est $q = \sqrt{L}$

a) Dire la production de la firme quand $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$.

La production de la firme quand $L = 1$ est $q = \sqrt{1} = 1$
La production de la firme quand $L = 2$ est $q = \sqrt{2} \approx 1,41$
La production de la firme quand $L = 3$ est $q = \sqrt{3} \approx 1,73$

b) Comparer l'augmentation de la production quand l'on passe de $L = 1$ à $L = 2$ et de $L = 2$ à $L = 3$. Que remarquez-vous ?

L'augmentation de la production quand on passe de $L = 1$ à $L = 2$ est de 0,41, cad qu'un input supplémentaire permet d'augmenter la production de 0,41
L'augmentation de la production quand on passe de $L = 2$ à $L = 3$ est de $1,73 - 1,41 = 0,32$, cad qu'un input supplémentaire permet d'augmenter la production de 0,32.

On remarque que le second input supplémentaire "produit moins" que le premier input supplémentaire ; Cette propriété classique est appelle productivité marginale décroissante

6 Développement et factorisation

1) Développer les expressions suivantes

$$3(x+2) \quad (2x+3)x4 \quad (3x)^2 \quad (1-x)(1+x+x^2+...+x^{(n-1)}) \quad (2x+1)(3x+5)$$

$$\begin{aligned}
3(x+2) &= 3x+2 \\
(2x+3)x4 &= 8x^2+12x. \textbf{ (Typographie de l'énoncé médiocre. D'autres interprétations possible} \\
(3x)^2 &= 9x^2 \\
(1-x)(1+x+x^2+...+x^{(n-1)}) &= (1+x+x^2+...+x^{(n-1)})-(x+x^2+...+x^{(n)}) = 1-x^n \\
(2x+1)(3x+5) &= 6x^2+13x+5
\end{aligned}$$

2) Factoriser les expressions suivantes

$$x^2 - x \qquad x^2+(a+b)x+ab \qquad x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx-abc$$

$$\begin{aligned}
x^2 - x &= x(x-1) \\
x^2+(a+b)x+ab &= (x+a)(x+b) \\
x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx-abc &= (X-a)(x-b)(x-c)
\end{aligned}$$

3) En admettant que 15 peut s'écrire 5+5+5, trouver une autre manière d'écrire 15, en utilisant 3 fois le même nombre, et toutes les opérations qu'il vous semblera convenable d'utiliser.

Il y a au moins 6 manières de répondre à la question :

$$14+14/14=15 \quad 15-15+15=15 \quad 15*15/15=15 \quad 15^{(15/15)}=15 \quad 16-16/16=15 \quad \sqrt{25}+\sqrt{25}+\sqrt{25}=15$$

Fin du corrigé du TD 1