Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 1

La théorie de la décision : les variables - les objectifs poursuivis - les contraintes

Automne 2021

Savoirs utiles : les mots programme d'optimisation, variables de choix, objectif poursuivi, contraintes.

Décider sérieusement nécessite une connaissance étendue du problèmes. Une décision réfléchie suppose une connaissance fine du contexte qui contraint la décision à prendre, une connaissance murie des objectifs poursuivis choix, et, bien évidemment des instruments du choix (les variables)	Le choix est dit «qualitatif» quand il y a un nombre fini d'alternatives ou quantitatif quand il y a un nombre infini d'alternatives, le plus souvent représenté par la valeur que prend une variable. On parlera de **variables qualitatives ou quantitatives**.	**L'objectif poursuivi** peut s'exprimer par beaucoup de mots. Le rôle du gestionnaire est de traduire cet objectif en une fonction ayant la propriété que plus elle est grande, meilleurs seront les objectifs	**Les contraintes** désignent les choix qui ne peuvent pas être faits, la valeur ou le plus souvent des conditions ***préalables*** que doivent remplir les variables de choix.

1 Quelques problèmes à portée de main, à formaliser

Dans cette partie du TD on vous propose de rechercher des décisions à prendre dans des contextes qui sont analysables de manière très intuitives. Il s'agira dans un premier temps d'étudier la bonne décision à prendre, et, dans un second temps, représenter le problème sous la forme canonique suivante :

$$\begin{array}{rl} \max_x & f(x) \\ s.c. & g(x) \geq 0 \end{array}$$

1) Un enfant gourmand dépense son argent de poche uniquement en bonbons. Plus il dispose de bonbons, plus il en est satisfait. Chaque sachet de bonbon coûte 1 €. Il dispose de 7 euros.

a) Décrire intuitivement son comportement

L'enfant dépense tous son argent de poche en bonbons. Il dépense ses 7 € et achète donc 7 paquets de bonbons.

b) formaliser son choix, définir la variable de choix, indiquer sa nature, représenter sa fonction objectif, indiquer par une équation quelle est sa contrainte. On écrira le programme correspondant.

<u>La variable de choix</u> est le nombre de paquets de bonbons achetés. Notons la x. C'est une variable quantitative : $x \in \mathbb{R}_+$.

<u>L'objectif de l'enfant gourmand</u> est d'acheter le plus de bonbons possibles. Il peut être représenté par n'importe quelle fonction croissante avec x. On prendra par exemple

$$f(x) = x$$

Bien d'autres choix auraient pu être effectués, bien que moins lisibles. La fonction $f(x) = \ln(x)$ aurait pu ausi convenir, comme la fonction $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$.

<u>La contrainte</u> est le fait qu'il ne peut pas acheter plus de paquets de bonbons que ne le permet son budget : ici $1 * x \leq 7$, qu'on peut écrire sous la forme canonique $7 - x \geq 0$.

<u>Le programme de l'enfant gourmand</u> est alors

$$\begin{array}{rl} \max_{x \geq 0} & x \\ s.c. & 7 - x \geq 0 \end{array}$$

2) Une famille donne à un enfant de l'argent de poche, mensuellement, sachant qu'il dépense tout son argent de poche uniquement en bonbons. Plus il dispose de bonbons, plus il en est satisfait. Chaque sachet de bonbon coûte 1 €. Cette famille donne à l'enfant

un revenu R. Elle prend en compte la satisfaction de l'enfant, mais aussi la santé de l'enfant susceptibles de développer plus de caries

a) Décrire intuitivement le choix de la famille

Il faut bien comprendre le mobile de la famille : faire plaisir à son fils, mais aussi le protéger des caries. Il va donc y avoir des arbitrages, qui dépendront de l'état des recommandations sanitaires, ou d'une connaissance approfondie des conséquences des caries pour l'enfant. Quelques bonbons, mais pas trop. De l'argent de poche mais pas trop.

La question est de savoir comment on peut aller plus loin. La tentative de formalisation va nous donner des pistes .

b) formaliser le choix d'argent de poche donné à l'enfant, définir les variables de choix de ce problème, définir et représenter sa fonction objectif défalquant à l'utilité de l'enfant la désutilité d'avoir des caries, indiquer par une équation ce que pourrait être la contrainte. On écrira à titre d'exemple un programme qui pourrait correspondre à une famille particulière, et le résoudre.

Les variable de choix le nombre de paquets de bonbons achetés, et le nombre de caries. Notons les x et c. Ce sont des variable quantitative : $x \in \mathbb{R}_+$. $c \in \mathbb{R}_+$: en effet, par le nombre de caries, on doit entendre le nombre moyen de caries.

L'objectif des parents Leur objectif représente cette ambivalence du choix qu'ils doivent réaliser : acheter le plus de bonbons possibles et en même temps éviter le plus possible les caries. Le choix de la fonction importe. On peut penser par exemple à $x - c$. Mais cela donne un peu le même poids à la carie et à x. Pour les parents qui ne regardent que la santé de l'enfant, leur objectif serait $-r$. Sinon, on peut trouver toutes sortes de combinaisons de ces deux paramètres qui donne des valeurs relatives au bonheur des bonbons et au malheur des caries. Par exemple $\sqrt{x} - r$ ou $x - r^k$ avec k grand... Ce critère est éminemment subjectif, et devrait diférer d'une famille à l'autre.

La contrainte La contrainte établit un lien entre le nombre moyen de caries et le nombre de paquets de bonbons ingérés par l'enfant tous les mois. C'est une donnée objective, qui provient de nos collègues de médecine.

Un programme familias est par exemple, dans un cas particulier ou on a six fois moins de caries que de paquets de bonbons ingérés de manière mensuelle.

$$\begin{aligned} \max_{x,r\geq 0} \quad & \sqrt{x} - r \\ s.c. \quad & r \geq \frac{1}{6}x \end{aligned}$$

La résolution, comme vu en cours et qui sera plus détaillée dans les prochains TD revient par exemple à maximiser la fonction

$$\sqrt{x} - \frac{1}{6}x$$

ce qui conduit à la solution x=9 : l'argent mensuel donné est alors de 9 euros.

3) Une firme produit un bien en quantité q. On admet que la firme est dans un contexte de concurrence pure et parfaite selon lequel, plus elle produit de bien, plus elle en vend, au prix p.

a) Peut-on à ce stade décrire les choix de production de la firme ?

La réponse est non : en effet : la firme peut bien avoir comme objectif de produire le plus qu'elle le peut. Mais elle ne peut prendre de manière réfléchie cette décision qu'en connaissance des coûts engendrés par la production.

On ne pourra donc analyser le choix de la firme que si elle connaît sa fonction de coût.

Dans un second temps, on indique le coût de production de la firme : pour produire la quantité q, la firme doit dépenser $\frac{1}{8}q^2$.

b) A votre avis quel serait dans ces conditions le bon choix de production de la firme ? Toute méthode que vous utiliserez pour arriver à une réponse sera bonne.

La connaissance de la fonction de coût permet de connaître le profit de la firme, lorsqu'elle produit la quantité q qu'elle vend au prix p : $\pi = pq - \frac{1}{8}q^2$. On a vu en cours, et en première année, et on le reverra dans les TD prochains que la maximisation de ce profit implique que le choix optimal de q vérifie la condition

$$p = \frac{1}{4}q$$

soit $q = 4p$.

c) formaliser le choix de la firme, définir la variable de choix, définir et représenter la fonction objectif poursuivie par la firme, indiquer s'il en est la contrainte de la firme. On écrira le programme correspondant. [Indication : il y a deux manières de formaliser le choix de la firme, deux programmes différents, qui à la fin, arrivent au même résultat]

La variable de choix la quantité de bien vendue, l'objectif commercial q . On peut aussi penser que le coût C est une variable de choix. cette dernière variable sera en lien avec le bien produit qui est aussi la quantité de bien vendue. Cesvariables osnt quantitatives : $q \in \mathbb{R}_+$, $C \in \mathbb{R}_+$.

L'objectif de la firme L'objectif que l'on retient pour la firme est le profit : les recettes moins le coûts : soit $\pi = pq - C$.

La contrainte La contrainte établit un lien entre le nombre de biens produits et le coût dépensé pour cet objectif. La contrainte n'est autre qu'une réécriture de la fonction de coût, soit, $C \geq C(q) = \frac{1}{8}q^2$ ou sous forme canonique

$$C - .\frac{1}{8}q^2 \geq 0$$

Le programme de la firme C'est alors.

$$\begin{array}{rl} \max_{q,C\geq 0} & pq - C \\ s.c. & C - .\frac{1}{8}q^2 \geq 0 \end{array}$$

2 Programme ordinaire des Firmes en concurrence pure et parfaite

Le but de cet exercice est d'analyser le comportement de plusieurs firmes. DEUX REPRESENTATIONS DE LA FIRME SONT UTILISEES TOUR A TOUR. *La première*, où l'on connaît la firme à partir de sa fonction de coût : on sait évaluer le coût pour produire un bien en quantité y : $C(y)$. Le profit s'écrit alors$\pi = py - C(y)$. *La seconde*, où l'on connaît la firme à partir de sa technologie qui décrit comment une quantité y de bien est produite à partir d'une quantité x d'input. Si on note p, le prix de l'output, w le prix de l'input w, le profit du plan de production (x, y) est donc $\pi(x, y) = py - wx$. Notez que dans cette seconde formulation, on devra déterminer à la fois x et y.

2.1 Firmes dont on connaît la fonction de coût

Considérons les trois firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de coût $C(y)$:

$$\begin{array}{lclclcl} A & : & C(y) = wy^2 & \quad & B & : & C(y) = wy^3 \\ C & : & C(y) = w\dfrac{y}{2-y} & & & & \text{avec l'hypothèse } y \leq 2 \end{array}$$

1) Pour chacune de ces firmes écrire le programme de la firme en CPP

$$\begin{array}{lclclc} A & : & \max_y py - wy^2 & B & : & \max_y py - wy^3 \\ C & : & \max_y py - w\dfrac{y}{2-y} & & & \textbf{avec l'hypothèse } y \le 2 \end{array}$$

2) Pour chacune de ces firmes décrire le comportement de la firme en CPP

Pour chacune des firmes on écrit la FOC, on vérifie les conditions secondes, et on conclue, ou on développe un complément d'analyse suivant le cas. Enfin, on n'oublie pas la dernière vérification à savoir si le profit obtenu est positif ou non

Firme A $\pi(y) = py - wy^2$ **;** $\pi'(y) = p - 2wy$ **;** $\pi''(y) = -2w < 0$ **; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC :** $p = 2wy$ **soit** $y = \frac{1}{2}\frac{p}{w}$ **; le profit est alors** $\pi = \frac{1}{2}\frac{p^2}{w} - \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} > 0$.

Firme B $\pi(y) = py - wy^3$ **;** $\pi'(y) = p - 3wy^2$ **;** $\pi''(y) = -6wy \le 0$ **; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC :** $p = 3wy^2$ **soit** $y = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{p}{w}}$ **; le profit est alors** $\pi = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} > 0$.

Firme C $\pi(y) = py - w\dfrac{y}{2-y}$ **;** $\pi'(y) = p - w\dfrac{1}{2-y} - w\dfrac{y}{(2-y)^2}$ **;** $\pi''(y) = -w\dfrac{1}{(2-y)^2} - w\dfrac{1}{(2-y)^2} - 2w\dfrac{1}{(2-y)^3} < 0$ **; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC :** $p = w/(2-y)$ **soit** $y = 2 - \frac{p}{w}$ **; le profit est alors** $\pi = py - \frac{p}{w}wy = 0$.

3) Ouvrir un tableur, avec un onglet pour la firme A et un onglet pour la firme B. Sur la première ligne, mettre les paramètres. On choisira $p = 0,10$ et $w = 1$, puis $p = 10$ et $w = 1$ et enfin pour $p = 500$ et $w = 1$. Dans la colonne de gauche, faire varier q de 1 à 100 (incrémenter de 1 ; vous pouvez changer les lettres et prendre y à la place de q si vous êtes plus à l'aise), dans la seconde colonne, écrire le profit correspondant et conclure si possible à propos du choix de la firme.

On trouve que lorsque $p = 0,1$**, la firme a toujours un profit négatif : ne pas produire. Lorsque** $p = 10$**, le profit optimal est obtenu pour** $q = 5$**, et on trouve enfin que pour** $p = 500$**, le profit est toujours croissant en** $q = 100$**, ce qui indique que le choix optimal de la firme est supérieur à 100.**

2.2 Plans de production optimaux en CPP de firmes dont on connaît la technologie de production à partir de un seul input

Considérons les 4 firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de production :

$$\begin{array}{lclclc} A & : & y = \sqrt{x} & B & : & y = x^{\frac{1}{3}} \\ C & : & y = 2 - \dfrac{2}{1+x} & D & : & y = x^2 \end{array}$$

On appelle ensemble des plans de production, l'ensemble des plans de production (x, y) réalisables par la firme c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y)\ y \le f(x)\}$. On rappelle que le profit du plan de production (x, y) est $\pi(x, y) = py - wx$

1) Pour chacune des firmes vérifier si l'ensemble des plans de production est convexe ou non

Le plan de production est en dessous de la courbe $y = f(x)$**. Une condition suffisantes (mais pas nécessaire) pour la convexité est que cette courbe** $y = f(x)$ **soit concave. En effet, l'ensemble la courbe** $y = f(x)$ **est alors convexe. Une condition pour que la fonction** f **soit concave est que sa dérivée seconde soit négative**

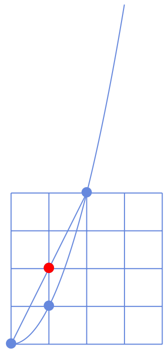
Firme A $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f''(x) = -1/4\sqrt{x} < 0$**, donc** f **concave et l'ensemble de production convexe.**

Firme B $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$**, donc** f **concave et l'ensemble de production convexe.**

Firme C $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x}$, $f'(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{4}{(1+x)^3}$**, donc** f **concave et l'ensemble de production convexe.**

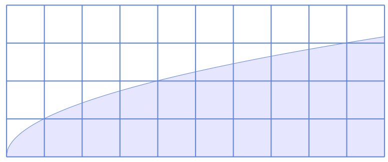
Firme D $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, f **est convexe, donc il y a à parier que l'ensemble de production n'est pas convexe. Prenons par exemple deux plans de production** $(0, 0)$ **et** $(2, 4)$**, le milieu de ces deux points est**

$I = (1,2)$ il n'est pas dans l'ensemble de production, car quand on utilise $x = 1$, on obtient au plus, par cette technologie $y = 1 < 2$.

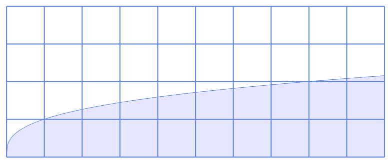


2) Pour chacune des firmes, tracer l'ensemble de production quand $x \leq 10$.

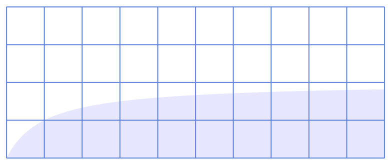
Firme A $f(x) = \sqrt{x}$,



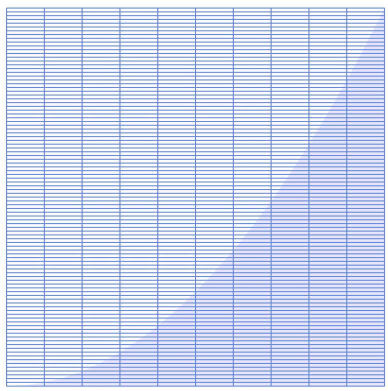
Firme B $f(x) = x^{1/3}$,



Firme C $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x}$,



Firme D $f(x) = x^2$,



3) Pour chacune des firmes, après avoir tracé plusieurs droites d'iso-profit, trouver le plan optimal de production quand $p = 1$ et $w = 1$

L'énoncé ne le précise pas, on suppose implicitement que la firme est en CPP. Le profit est $\Pi = pf(x) - wx = f(x) - x$; $\Pi_x = f'(x) - 1$; $\Pi_{xx} = f''(x)$; quand la dérivée seconde est négative, comme dans les cas A, B et C, le plan optimal

de production est tel que la condition première $\Pi_x = 0$ est satisfaite, soit, ici quand $f'(x) = 1$ (cad, vieux souvenir de micro, quand la productivité marginale égale le prix relatif du facteur).

<u>Firme A</u> $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f''(x) = -1/4\sqrt{x} < 0$, **FOC :** $2\sqrt{x} = 1$ **soit** $x = 1/4$, **ce qui définit le maximum de production car** f **concave.**

<u>Firme B</u> $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, **FOC :** $x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$ **donc** $x^2 = \frac{1}{27}$ **et** $x = 0,19245$, **ce qui définit le maximum de production car** f **concave.**

<u>Firme C</u> $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x}$, $f'(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{4}{(1+x)^3}$, **FOC :** $(1+X)^2 = 2$, **soit** $1+x = \sqrt{2}$, $x = 0,414213$, **ce qui définit le maximum de production car** f **concave.**

<u>Firme D</u> $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, **on ne peut pas utiliser la FOC qui détermine un minimum local, Plus la firme produit, plus elle va faire de profit. Il n'y a donc pas de profit optimum.**

4) Pour chacune des firmes, reprendre la même question quand $p = 2$ et $w = 1$

Le raisonnement identique conduit à la FOC $f'(x) = \dfrac{w}{p} = 0,5$. **On reprend les FOC pour chacune des firmes A, B, C dont ont sait qu'elle caractérise le choix optimal. On présente les résultats dans un tableau**

	caractéritiques	$p = 1$; $W = 1$; $f'(x) = 1$	$p = 2$; $W = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}$
Firme A	$f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f'' < 0$	$2\sqrt{x} = 1$, **soit** $x = 1/4$	$\sqrt{x} = 1$, **soit** $x = 1$
Firme B	$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f'' < 0$	$x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$, **soit** $x = \sqrt{\dfrac{1}{27}} = 0,19245$	$x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, **soit** $x = \sqrt{\dfrac{8}{27}} = 0,54433$
Firme C	$f'(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^2}$, $f'' < 0$	$(1+X)^2 = 2$, **soit** $1+x = \sqrt{2}$, $x = 0,414213$	$(1+X)^2 = 4$, **soit** $1+x = 2$, $x = 1$

Pour la firme D, **il n'y a pas de comportement optimal. Elle produirait à l'infini, et ce, quel que soit les niveaux de prix positifs envisagés.**

5) Vérifier que lorsque l'on passe de $p = 1$ et $w = 1$ à $p = 2$ et $w = 1$, le plan de production optimal conduit à produire plus. Trouver un argument mathématique qui permette de l'expliquer.

On vérifie que le plan de production est plus élevé, en vérifiant par exemple qu'il y a plus d'inputs utilisés quand l'on passe de $p = 1$ **et** $w = 1$ **à** $p = 2$ **et** $w = 1$.

firme A **Elle utilisait** $1/4$. **Désormais, 1.** **OK**

firme B **Elle utilisait** $\sqrt{\dfrac{1}{27}}$. **Désormais,** $\sqrt{\dfrac{8}{27}}$. **OK**

firme C **Elle utilisait** $\sqrt{2} - 1$. **Désormais, 1.** **OK**

Mathématiquement dans le premier cas, la solution est caractérisée par $f'(x) = 1$ **alors que dans le second cas par** $f'(x) = 1/2$. **Comme pour les firmes** A, B **et** C f' **est décroissante, la solution de la deuxième équation est nécessairement plus grande.**

Ce raisonnement mathématique est conforme à l'intuition économique. Quand le prix de vente augmente, toutes choses égales par ailleurs, l'offre de la firme est plus élevée.

6) Même question quand $p = 2$ et $w = 2$. Comparer avec les résultats de la question 3).

Notons que quand à la fois le prix de vente et le prix de l'input augmentent dans les mêmes proportions, si le profit va augmenter dans la même proportion, le choix optimal de la firme ne bouge pas. En effet. Dans les cas des firmes A, B **et** C, **l'équation qui caractérise le choix optimal dans la question 3 était** $f'(x) = 1/1 = 1$, **celle qui caractérise le choix optimal dans la question 6 est** $f'(x) = 2/2 = 1$, **soit la même équation (donc les mêmes solutions).**

<u>Fin du corrigé du TD 1</u>