Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 1 - groupe 127

La théorie de la décision : les variables - les objectifs poursuivis - les contraintes

Automne 2021

Savoirs utiles : les mots programme d'optimisation, variables de choix, objectif poursuivi, contraintes.

Décider sérieusement nécessite une connaissance étendue du problèmes. Une décision réfléchie suppose une connaissance fine du contexte qui contraint la décision à prendre, une connaissance murie des objectifs poursuivis choix, et, bien évidemment des instruments du choix (les variables)	Le choix est dit «qualitatif» quand il y a un nombre fini d'alternatives ou quantitatif quand il y a un nombre infini d'alternatives, le plus souvent représenté par la valeur que prend une variable. On parlera de **variables qualitatives ou quantitatives**.	**L'objectif poursuivi** peut s'exprimer par beaucoup de mots. Le rôle du gestionnaire est de traduire cet objectif en une fonction ayant la propriété que plus elle est grande, meilleurs seront les objectifs	**Les contraintes** désignent les choix qui ne peuvent pas être faits, la valeur ou le plus souvent des conditions *préalables* que doivent remplir les variables de choix.

1 Quelques problèmes à portée de main, à formaliser

Dans cette partie du TD on vous propose de rechercher des décisions à prendre dans des contextes qui sont analysables de manière très intuitives. Il s'agira dans un premier temps d'étudier la bonne décision à prendre, et, dans un second temps, représenter le problème sous la forme canonique suivante :

$$\begin{array}{rl} \max_x & f(x) \\ s.c. & g(x) \geq 0 \end{array}$$

1) Un enfant gourmand dépense son argent de poche uniquement en bonbons. Plus il dispose de bonbons, plus il en est satisfait. Chaque sachet de bonbon coûte 1 €. Il dispose de 7 euros.

a) Décrire intuitivement son comportement

b) formaliser son choix, définir la variable de choix, indiquer sa nature, représenter sa fonction objectif, indiquer par une équation quelle est sa contrainte. On écrira le programme correspondant.

2) Une famille donne à un enfant de l'argent de poche, mensuellement, sachant qu'il dépense tout son argent de poche uniquement en bonbons. Plus il dispose de bonbons, plus il en est satisfait. Chaque sachet de bonbon coûte 1 €. Cette famille donne à l'enfant un revenu R. Elle prend en compte la satisfaction de l'enfant, mais aussi la santé de l'enfant susceptibles de développer plus de caries

a) Décrire intuitivement le choix de la famille

b) formaliser le choix d'argent de poche donné à l'enfant, définir les variables de choix de ce problème, définir et représenter sa fonction objectif défalquant à l'utilité de l'enfant la désutilité d'avoir des caries, indiquer par une équation ce que pourrait être la contrainte. On écrira à titre d'exemple un programme qui pourrait correspondre à une famille particulière, et le résoudre.

3) Une firme produit un bien en quantité q. On admet que la firme est dans un contexte de concurrence pure et parfaite selon lequel, plus elle produit de bien, plus elle en vend, au prix p.

a) Peut-on à ce stade décrire les choix de production de la firme ?

Dans un second temps, on indique le coût de production de la firme : pour produire la quantité q, la firme doit dépenser $\frac{1}{8}q^2$.

b) A votre avis quel serait dans ces conditions le bon choix de production de la firme ? Toute méthode que vous utiliserez pour arriver à une réponse sera bonne.

c) formaliser le choix de la firme, définir la variable de choix, définir et représenter la fonction objectif poursuivie par la firme, indiquer s'il en est la contrainte de la firme. On écrira le programme correspondant. [Indication :

il y a deux manières de formaliser le choix de la firme, deux programmes différents, qui à la fin, arrivent au même résultat]

2 Programme ordinaire des Firmes en concurrence pure et parfaite

Le but de cet exercice est d'analyser le comportement de plusieurs firmes. DEUX REPRESENTATIONS DE LA FIRME SONT UTILISEES TOUR A TOUR. *La première*, où l'on connaît la firme à partir de sa fonction de coût : on sait évaluer le coût pour produire un bien en quantité y : $C(y)$. Le profit s'écrit alors$\pi = py - C(y)$. *La seconde*, où l'on connaît la firme à partir de sa technologie qui décrit comment une quantité y de bien est produite à partir d'une quantité x d'input. Si on note p, le prix de l'output, w le prix de l'input w, le profit du plan de production (x, y) est donc $\pi(x, y) = py - wx$. Notez que dans cette seconde formulation, on devra déterminer à la fois x et y.

2.1 Firmes dont on connaît la fonction de coût

Considérons les trois firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de coût $C(y)$:

$$\begin{array}{lclclcl} A & : & C(y) = wy^2 & \qquad & B & : & C(y) = wy^3 \\ C & : & C(y) = w\dfrac{y}{2-y} & & & & \text{avec l'hypothèse } y \leq 2 \end{array}$$

1) Pour chacune de ces firmes écrire le programme de la firme en CPP

2) Pour chacune de ces firmes décrire le comportement de la firme en CPP

3) Ouvrir un tableur, avec un onglet pour la firme A et un onglet pour la firme B. Sur la première ligne, mettre les paramètres. On choisira $p = 0,10$ et $w = 1$, puis $p = 10$ et $w = 1$ et enfin pour $p = 500$ et $w = 1$. Dans la colonne de gauche, faire varier q de 1 à 100 (incrémenter de 1 ; vous pouvez changer les lettres et prendre y à la place de q si vous êtes plus à l'aise), dans la seconde colonne, écrire le profit correspondant et conclure si possible à propos du choix de la firme.

2.2 Plans de production optimaux en CPP de firmes dont on connaît la technologie de production à partir de un seul input

Considérons les 4 firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de production :

$$\begin{array}{lclclcl} A & : & y = \sqrt{x} & \qquad & B & : & y = x^{\frac{1}{3}} \\ C & : & y = 2 - \dfrac{2}{1+x} & & D & : & y = x^2 \end{array}$$

On appelle ensemble des plans de production, l'ensemble des plans de production (x, y) réalisables par la firme c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y)\ y \leq f(x)\}$. On rappelle que le profit du plan de production (x, y) est $\pi(x, y) = py - wx$

1) Pour chacune des firmes vérifier si l'ensemble des plans de production est convexe ou non

2) Pour chacune des firmes, tracer l'ensemble de production quand $x \leq 10$.

3) Pour chacune des firmes, après avoir tracé plusieurs droites d'iso-profit, trouver le plan optimal de production quand $p = 1$ et $w = 1$

4) Pour chacune des firmes, reprendre la même question quand $p = 2$ et $w = 1$

5) Vérifier que lorsque l'on passe de $p = 1$ et $w = 1$ à $p = 2$ et $w = 1$, le plan de production optimal conduit à produire plus. Trouver un argument mathématique qui permette de l'expliquer.

6) Même question quand $p = 2$ et $w = 2$. Comparer avec les résultats de la question 3).

FIN du sujet du TD n° 1 - groupe 127