Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Corrigé du TD n° 2

Droites et ensembles dans le plan

Automne 2021

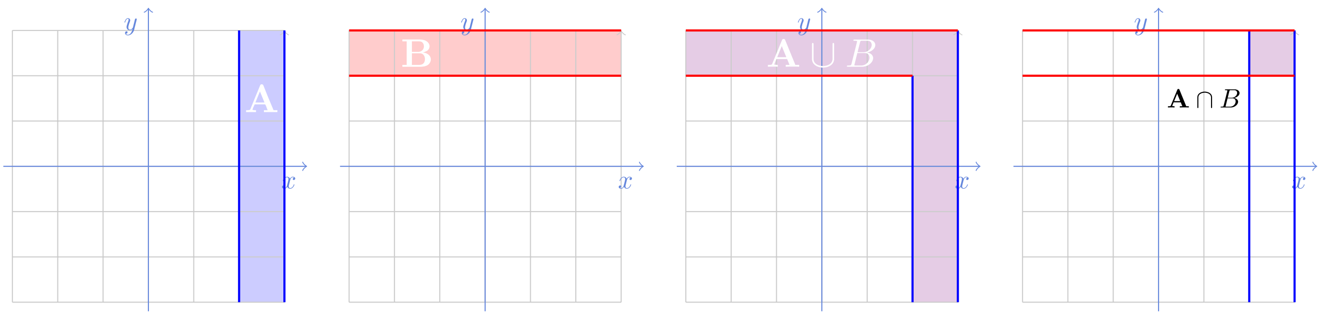
Dans ce TD, on travaille principalement dans le PLAN : $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathbb{R}_+^2 = \{(p,q)/p \in \mathbb{R}_+, q \in \mathbb{R}_+\}$

1 Ensembles déduits d'autres ensembles

1) Soit les ensembles A et B suivants inclus dans $\mathbb{R}^2$. Pour chaque cas, les représenter dans $\mathbb{R}^2$, puis représenter $A \cap B$ et $A \cup B$ en indiquant leur nature particulière.

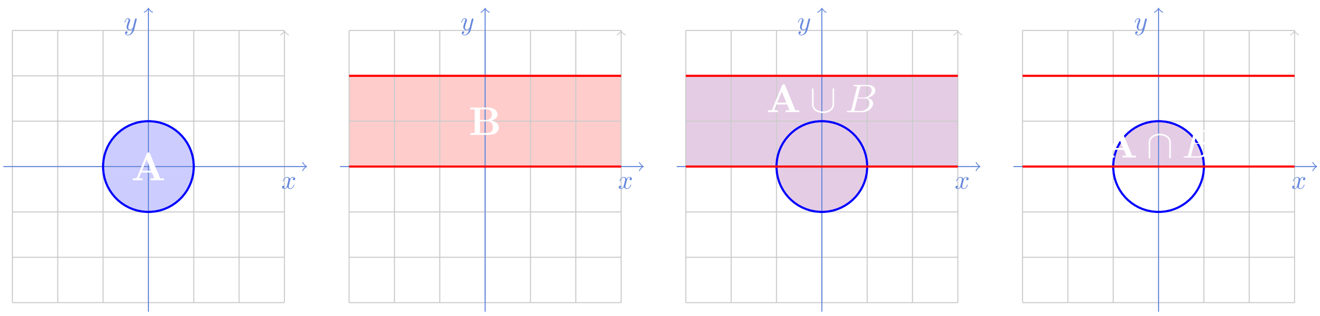
$A = \{11 \leq 5x+1 \leq 16\}$	$B = \{11 \leq 5y+1 \leq 16\}$	*Nature de* $A \cup B$:	*Nature de* $A \cap B$:
$A = \{x^2+y^2 \leq 1\}$	$B = \{0 \leq x \leq 2\}$	*Nature de* $A \cup B$:	*Nature de* $A \cap B$:
$A = \{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$	$B = \{x+y \leq -1, x \leq 0, y \geq 0\}$	*Nature de* $A \cup B$:	*Nature de* $A \cap B$:
$A = \{(p,q)/pq - \frac{1}{2}q^2 \geq 0\}$	$B = \{(p,q)/pq - \frac{1}{3}q^3 \geq 0\}$	*Nature de* $A \cup B$:	*Nature de* $A \cap B$:

Dans le premier exemple, on a $A = [2,3]$, $B = [2,3]$ Les quatre figures suivantes représentent pour le premier cas les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.



A B $A \cup B$ $A \cap B$

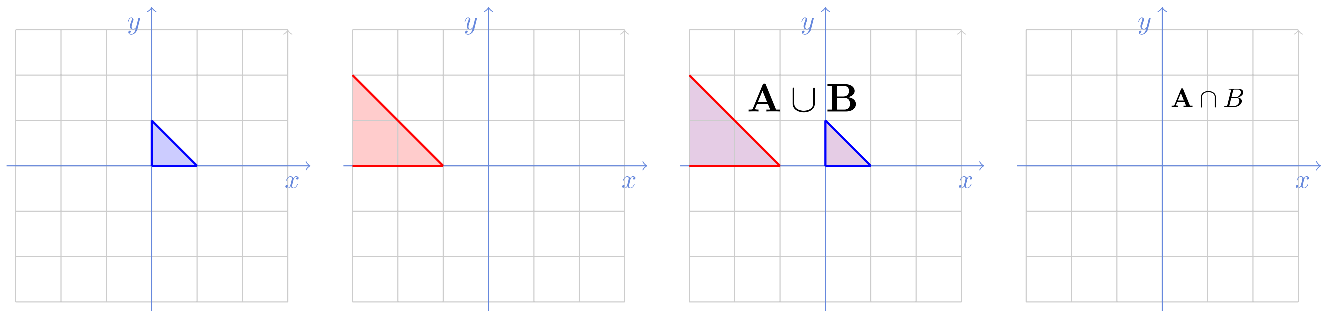
Dans le second exemple, A est le disque centré à l'origine de distance 1, $B = [0,2]$ Les quatre figures suivantes représentent pour le second cas les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.



A B $A \cup B$ $A \cap B$

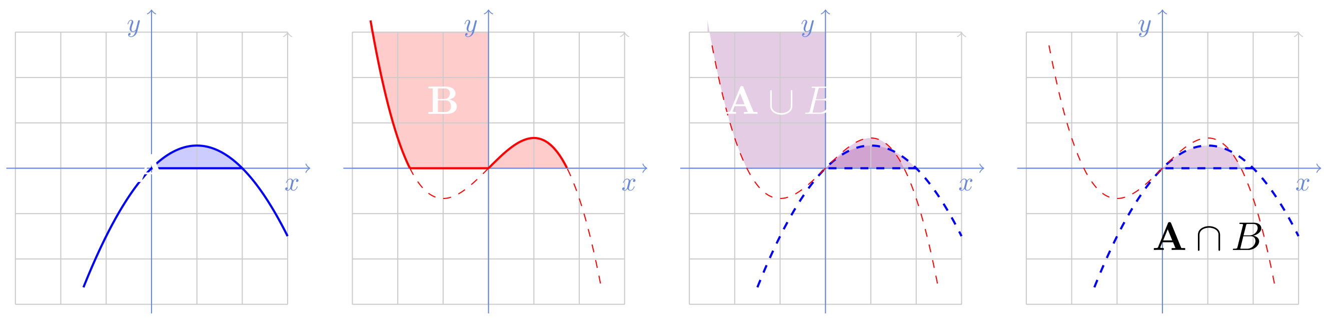
Dans le troisième exemple, A est un triangle, B est un cône. $A \cap B = \emptyset$. Les quatre figures suivantes représentent

pour le troisième cas les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.



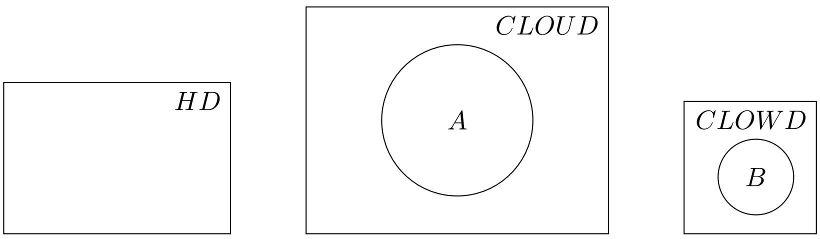
A B $A \cup B$ $A \cap B$

Dans le quatrième exemple, A est la surface en dessous de la courbe $f_A : q \rightarrow pq - \frac{1}{2}q^2$ et au-dessus de l'axe vertical, tandis que B est la surface en dessous de la courbe $f_B : q \rightarrow pq - \frac{1}{3}q^3$ et au-dessus de l'axe vertical. f_A est une fonction concave, croissante puis décroissante : en effet, $f'_A = p - q$, $f'' = -1 < 0$. f_B est une fonction avec un profil plus complexe, convexe puis concave, décroissante, croissante puis décroissante : en effet, $g' = p - q^2$; la dérivée s'annule quand $q = \pm\sqrt{p} > 0$, négative pour des valeurs de q très grandes ou très petites. La dérivée seconde est négative pour $q = \sqrt{p}$ qui correspond dont à un maximum local de la fonction. Les quatre figures suivantes représentent pour le second cas les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$. <u>On représente ci-dessous le cas $p = 1$.</u>



A B $A \cup B$ $A \cap B$

2) Un utilisateur dispose sur son ordinateur d'un disque dur HD de 500 Go, qui comprend une partition de 100 Go. pour les fichiers. systèmes. Il dispose par ailleurs d'un service CLOUD de 1To, sur lequel il synchronise les données A et d'un second service CLOWD de 40 Go sur lequel il synchronise les données B. Combien cet utilisateur peut-il avoir au plus de données synchronisées sur son disque dur, différentes de A et B, sur son premier service CLOUD, sur son second service CLOWD ? On justifiera attentivement les réponses.



Sur son disque HD, l'utilisateur pourrait mettre au plus 400 Go

Sur le premier service CLOUD, il lui reste 1To moins $m(A)$. Si tout le service CLOWD plus HD était à actualiser, ce serait 40+400=450 Go. Il n'y aurait aucune limitation si $m(A) < 550$.

Sur le second service CLOWD, il n'y a que 40 Go moins $m(B)$. Donc, très probablement des limitations à envisager s'il synchronisait HD et A

2 Droites dans un plan

Considérons les six droites suivantes du Plan :

$$\begin{array}{llll} (D1): & 10x-3y=2 & (D4): & x+5=3y \\ (D2): & x+3y=-2 & (D5): & 5x-2=1,5y \\ (D3): & 5x+1=1,5y & (D6): & 6x+3=8y \end{array}$$

1) Parmi ces six droites, dires lesquelles sont croissantes, lesquelles sont décroissantes

Sont croissantes (D1), (D3), (D4), (D5) et (D6)

2) Parmi ces six droites, dire lesquelles sont parallèles (s'il en est)

Il ne peut y avoir de droites différentes parallèles que parmi les 5 qui sont croissantes. On calcule alors pour chacune d'entre-elles leur pente qu'on note π_i pour la droite (D_i).

$$\pi_1=10/3 \qquad \pi_3=5/1,5=10/3 \qquad \pi_4=1/3 \qquad \pi_5=5/1,5=10/3 \qquad \pi_6=6/8=3/4.$$

Il en ressort que les droites (D1), (D3) et (D5) sont parallèles, les autres droites ayant des pentes distinctes.

3) Parmi ces six droites, dire laquelle coupe l'axe horizontal, le plus à droite possible

Caractériser le point pour lequel la droite considérée coupe l'axe horizontal est rechercher $(x,0)$ sur la droite. $(x,0)$ est sur la droite (D_i) si ce point vérifie l'équation qui définit (D_i)

Pour (D_1) x vérifie $10x=2$, soit $x=5$

Pour (D_2) x vérifie $x=-2$, soit $x=-2$

Pour (D_3) x vérifie $5x+1=0$, soit $x=-0,2$

Pour (D_4) x vérifie $x+5=0$, soit $x=-5$

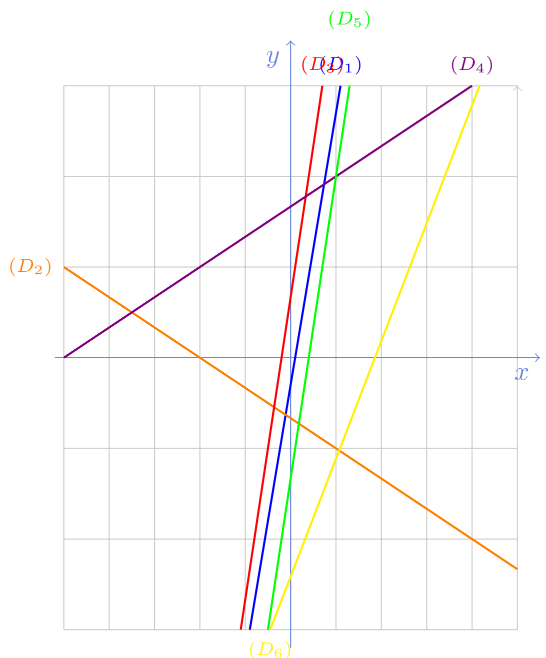
Pour (D_5) x vérifie $5x-2=0$, soit $x=0,4$

Pour (D_6) x vérifie $6x+3=0$, soit $x=-0,5$

En comparant les différents résultats précédents, on conclue que c'est (D_1) qui coupe l'axe horizontal, le plus à droite possible

4) En vous restreignant à $x\in[-5,5]$ et $y\in[-3,3]$, tracer les droites $(D1)$ à $(D6)$.

Pour chacune des droites, on calcule les points d'abscisse -5 et 5, et on vérifient qu'ils restent bien dans l'intervalle [-3,3]. Sinon, on regarde les valeurs pour lesquelles l'image touche [-3,3].



(D_1) passe par les point $x=-5$ $y=-52/3$ et par $x=5$ $y=48/3$, hors champs. Et aussi par les point $y=-3$ $x=-9/10$ et par $y=3$ $x=11/10$

(D_2) passe par les point $x=-5$ $y=3/3$ et par $x=5$ $y=-7/3$,

(D_3) passe par les point $x=-5$ $y=-16$ et par $x=5$ $y=52/3$, hors champs. Et aussi par les point $y=-3$ $x=-11/10$ et par $y=3$ $x=7/10$

(D_4) passe par les point $x=-5$ $y=0$ et par $x=5$ $y=46/3$, hors champs. Et aussi par les point $y=-3$ $x=-.5$ et par $y=3$ $x=1.3$

(D_5) passe par les point $x=-5$ $y=-18$ et par $x=5$ $y=10/3$,

(D_6) passe par les point $x=-5$ $y=-27/8$ et par $x=5$ $y=33/8$, hors champs. Et aussi par les point $y=-3$ $x=-4.5$ et par $y=3$ $x=25/6$

5) Dire dans le Plan (p, q) quelle est la nature des droites suivantes (préciser croissance et pente) :

$$p = 0 \qquad q = 0 \qquad p + q = 2 \qquad p + q = -2 \qquad p - q = 2$$

dans le Plan (p, q), $p = 0$ désigne une droite verticale, plus précisément, l'axe vertical

dans le Plan (p, q), $q = 0$ désigne une droite horizontale, plus précisément, l'axe horizontal

dans le Plan (p, q), $p + q = 2$ désigne une droite décroissante, passant "au-dessus" de l'origine

dans le Plan (p, q), $p + q = -2$ désigne une droite décroissante, parrallèle à la précédente, passant "en-dessous" de l'origine, plus précisément, symétrique à la précédente par rapport à l'origine.

dans le Plan (p, q), $p - q = 2$ désigne une droite croissante, passant à gauche de l'origine

6) Donner dans l'espace x_1, x_2 l'équation de la droite passant par le point A parallèle à la droite $(\mathcal{D})$ pour différentes valeurs de A et $(\mathcal{D})$:

$$\begin{array}{ll} \text{A(3,1)} & (\mathcal{D}) : 3x_1 + x_2 = 0 \\ \text{A(0,0)} & (\mathcal{D}) : 3x_1 + x_2 = 3 \\ \text{A(-1,1)} & (\mathcal{D}) : 3x_1 - x_2 = 5 \end{array}$$

Principe : L'équation de la droite qu'on recherche commence pareil, avec les mêmes coefficients devant x_1 et x_2 : il suffit de redonner le membre de droite correspondant au point par lequel la droite doit passer.

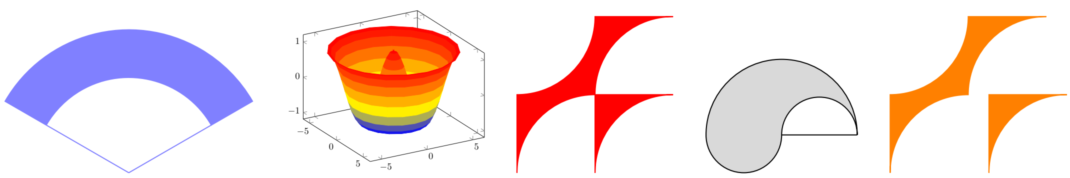
La droite parallèle à $(\mathcal{D})$ d'équation : $3x_1 + x_2 = 0$ passant par $A(3, 1)$ est d'équation $3x_1 + x_2 = 3*3+1 = 10$. Réponse $3x_1 + x_2 = 10$

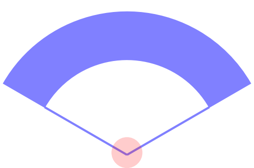
La droite parallèle à $(\mathcal{D})$ d'équation : $3x_1 + x_2 = 3$ passant par $A(0, 0$ est d'équation $3x_1 + x_2 = 3*0+0 = 0$. Réponse $3x_1 + x_2 = 0$

La droite parallèle à $(\mathcal{D})$ d'équation : $3x_1 - x_2 = 5$ passant par $A(-1, 1)$ est d'équation $3x_1 - x_2 = 3*(-1) - 1 = -4$. Réponse $3x_1 - x_2 = -4$

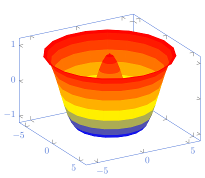
3 Ensembles ouverts

Considérez les cinq représentations suivantes dans le Plan et dans $\mathbb{R}^3$, dire à quelle conditions chaque représentation est ou non un ensemble ouvert, en développant votre argumentation

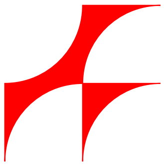




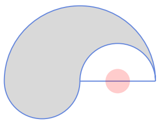
Cet ensemble violet contient une surface pleine et deux traits. Ces deux traits, ne sont pas par essence un ouvert. N'importe quelle boule, par exemple sur le point anguleux, ne peut être inclue dans cet ensemble



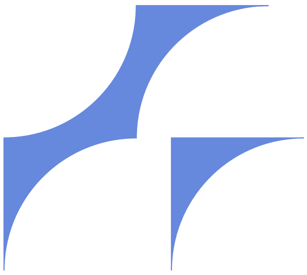
Ceci est un ensemble à 3 dimensions avec beaucoup de trous. Si on mettait une boule à trois dimensions sur le bord haut de 'l'objet', elle irait obligatoirement en dehors de l'objet.



Ceci est un objet à dimensions avec beaucoup de points anguleux. NEAMOINS, si on suppose que la frontière de l'objet n'est pas incluse dans l'objet (en particulier tous les points anguleux) cet ensemble, réunion d'ensembles ouverts serait un ouvert.



Comme pour le premier exemple, le trait, dans cet objet ne peut en aucun cas faire partie d'un ouvert.



Comme dans le troisième exemple, cet objet est un ouvert si les frontières ne sont pa contenues dans l'objet.

4 Segments

1) Pour $A = (10, 0)$ et $B = (0, 10)$, calculer les moyennes arithmétiques de A et B, que l'on notera C, avec les pondérations suivantes :

$\lambda_A = 1$	$\lambda_B = 0$	$C = (\quad,\quad)$	$\lambda_A = .1$	$\lambda_B = .9$	$C = (\quad,\quad)$
$\lambda_A = .2$	$\lambda_B = .8$	$C = (\quad,\quad)$	$\lambda_A = .3$	$\lambda_B = .7$	$C = (\quad,\quad)$
$\lambda_A = .4$	$\lambda_B = .6$	$C = (\quad,\quad)$	$\lambda_A = .5$	$\lambda_B = .5$	$C = (\quad,\quad)$
$\lambda_A = .6$	$\lambda_B = .4$	$C = (\quad,\quad)$	$\lambda_A = .7$	$\lambda_B = .3$	$C = (\quad,\quad)$
$\lambda_A = .8$	$\lambda_B = .2$	$C = (\quad,\quad)$	$\lambda_A = .9$	$\lambda_B = .1$	$C = (\quad,\quad)$

C'est juste un calcul de moyenne, coordonnée par coordonnée. Dans ce cas très particulier, les calculs sont particulièrement simples.

$\lambda_A = 1$	$\lambda_B = 0$	$C = (10, 0)$	$\lambda_A = .1$	$\lambda_B = .9$	$C = (1, 9)$
$\lambda_A = .2$	$\lambda_B = .8$	$C = (2, 8)$	$\lambda_A = .3$	$\lambda_B = .7$	$C = (3, 7)$
$\lambda_A = .4$	$\lambda_B = .6$	$C = (4, 6)$	$\lambda_A = .5$	$\lambda_B = .5$	$C = (5, 5)$
$\lambda_A = .6$	$\lambda_B = .4$	$C = (6, 4)$	$\lambda_A = .7$	$\lambda_B = .3$	$C = (7, 3)$
$\lambda_A = .8$	$\lambda_B = .2$	$C = (8, 2)$	$\lambda_A = .9$	$\lambda_B = .1$	$C = (9, 1)$

2) Dans les exemples suivants, dire si le point C appartient au segment d'extrémités A et B :

$A = (0, 1)$	$B = (2, 1)$	$C = (2, 2)$	$A = (0, 1)$	$B = (2, 2)$	$C = (0, 2)$
$A = (0, 2)$	$B = (2, 0)$	$C = (1, 1)$	$A = (0, 1)$	$B = (2, 0)$	$C = (1.5, .5)$
$A = (0, 1)$	$B = (3, 1)$	$C = (2, 2)$	$A = (10, 1)$	$B = (0, 1)$	$C = (5, 1)$

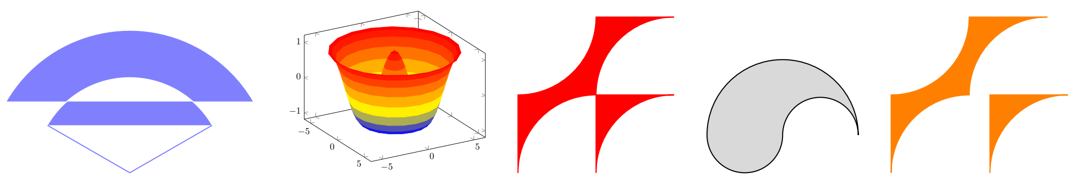
Pour voir si un point appartient à un segment, il faut que le taux de variation pour aller d'un point à l'autre soit identique au taux de variation pour aller d'un second point à un troisième. OU BIEN, il suffit d'exhiber les poids qui appliqués à A et B donnent C

Pour voir si un point n'appartient pas à un segment, il y a deux cas. Soit on montre que ces points ne sont pas alignés. Il y a parfois des arguments assez immédiats et spécifiques pour montrer que les trois points A, B, C ne sont pas alignés. Soit on est dans un cas où A, B, C sont alignés, mais C n'est pas entre A et B.
A chaque fois, il faut réfléchir, c'est un exercice mental, d'agilité

A=(0,1)	**B=(2,1)**	**C=(2,2)**	**C au dessus de B, et A a une autre première coordonnée. Non alignés.**
A=(0,2)	**B=(2,0)**	**C=(1,1)**	**C est exactement au milieu de A et B**
A=(0,1)	**B=(3,1)**	**C=(2,2)**	**La seconde coordonnée de C est exactement au milieu des secondes coordonnées de A et B. Mais le milieu de la première coordonnée de A et B est $1,5 \neq 2$. Non alignés.**
A=(0,1)	**B=(2,2)**	**C=(0,2)**	**C est au-dessus de A et B a une autre première coordonnée.**
A=(0,1)	**B=(2,0)**	**C=(1.5,.5)**	**Ne sont pas alignés. Si on prend la première coordonnée de C, il faudrait prendre 3/4 de B et donc 1/4 de A, mais sur la seconde coordonnée, cela donnerait $1/4 * 1 = .0,25 \neq .5$. Non alignés**
A=(0,1)	**B=(2,0)**	**C=(1.5,.5)**	**En raisonnant en partant de la seconde coordonnée, les poids devraient être 1/2 1/2. Mais cela ne convient pas. En effet, pour la première coordonnée on devrait avoir 1 et non 1,5**
A=(10,1)	**B=(0,1)**	**C=(5,1)**	**C est le milieu de A et B.**

5 Ensembles convexes

Considérez les cinq représentations suivantes dans le Plan et dans $\mathbb{R}^3$:

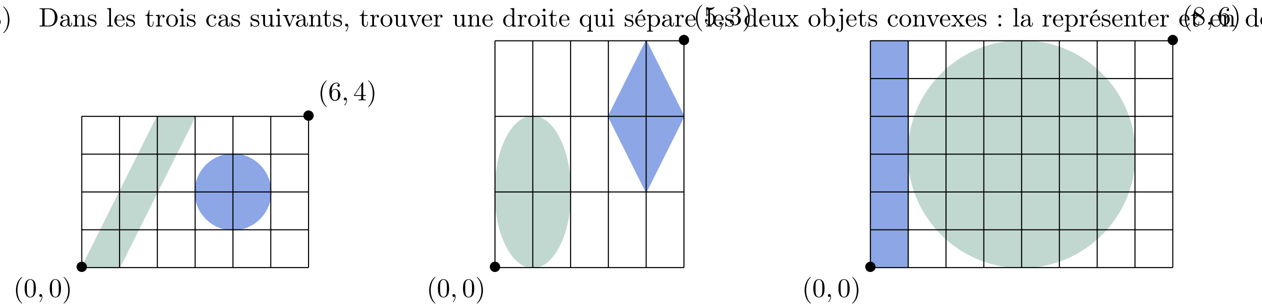


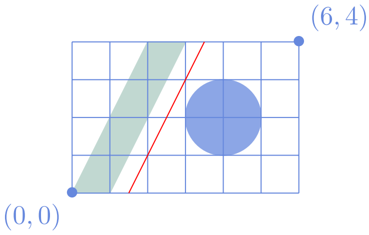
1) Pour chacun des cas, dire s'il s'agit ou non d'un objet convexe

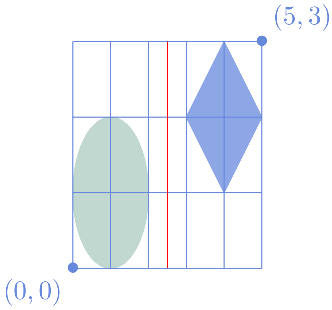
2) Pour chacun des cas, vous dessinerez le plus petit convexe qui contient l'objet considéré.

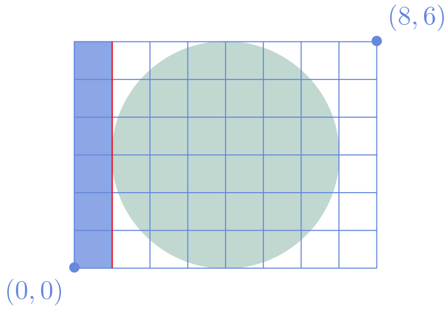
Aucun de ces objets n'est convexe. En remplissant les blancs, on convexifie ces objets [trop difficile à dessiner]

3) Dans les trois cas suivants, trouver une droite qui sépare les deux objets convexes : la représenter et en donner l'équation.







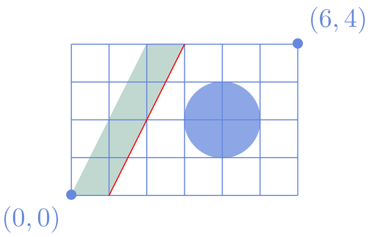


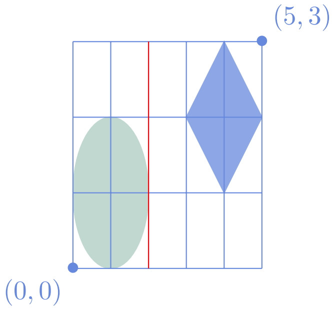
Pente : +2. $y = 2(x - \frac{3}{2})$ **Droite verticale** $x = 2,5$ **Droite verticale** $x = 1$

A noter : **dans ce dernier cas, il n'y a qu'une seule droite qui sépare les deux objets, elle est tangente aux deux objets.**

4) Reprendre la question précédente en cherchant dans les trois cas une droite, qui sépare les deux objets convexes, qui soit tangente à l'objet tangent de gauche. En préciser l'équation.

On reprend seulement les deux premiers cas, étant donné qu'on avait trouvé qu'un seul hyperplan séparateur dans le troisième cas.





Pente : +2. $y = 2(x - 1)$ **Droite verticale** $x = 2$

FIN du corrigé du TD 2