Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 2

Optimisation sans contrainte

Automne 2021

Savoirs utiles : Les dérivées standard, l'énoncé des conditions premières, l'énoncé des conditions secondes, optimisation discrète

A savoir, les dérivées des fonctions polynomiales. Si $f = x^n$, alors $f' = nx^{n-1}$, qui se généralise aux fonctions puissance, avec α coefficient réel : si $f = x^\alpha$, alors $f' = \alpha x^{\alpha-1}$. Connaître les dérivées des fonctions logarithme et exponentielle : si $f = \ln(x)$ et $g = e^x$, alors $f' = 1/x$ et $g' = e^x$.
Une fois les dérivées des fonctions d'une variable connue, la dérivation des fonctions de plusieurs variables, variable par variable suit les mêmes règles. On repère LA variable selon laquelle on veut dériver, tout le reste est considéré comme des paramètres.

On considère dans ce TD le programme d'optimisation $max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad f(x,y)$ cad que l'on recherche le maximum d'une fonction de deux variables. La condition première

$$f_x = 0 \qquad f_y = 0$$

indique qu'il faut se pencher sur les points (x, y) qui annulent les deux dérivées partielles. Ce focus provient du théorème à connaître selon lequel, si (x, y) est solution du programme d'optimisation, alors $f_x = 0 \qquad f_y = 0$. C'est une condition <u>nécéssaire</u>.

Des conditions secondes indiquent que les candidats qui satisfont les conditions premières sont la solution. Par exemple qd f concave ($f_{xx} \leq 0, f_{yy} \leq 0, f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})2 > 0$), mais de telles conditions ne sont pas toujours vérifiées et conduisent à une étude cas par cas.

1 Dérivées premières et secondes d'une fonction de une ou deux variables

1) Considérez les fonctions $f(x)$ suivantes, calculer pour chacun des cas la dérivée première (notée $f'(x)$) et la dérivée seconde (notée $f''(x)$). $\quad f(x) = e^x \quad f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = \ln(x) \quad f(x) = x^a \quad f(x) = (1+\sqrt{x})^2 \quad f(x) = (1+x^2)^{1/2}$

Ces dérivées sont classiques, il faut maîtriser deux choses, la dérivée de la fonction puissance $(x^a)' = ax^{a-1}$ et la dérivée de la composée de deux fonction $(f(g(x)))' = f'(g(x)) * g'(x)$. On trouve dans le même ordre :

$$f'(x) = e^x \quad f'(x) = 1/2\sqrt{x} \quad f'(x) = 1/x \quad f'(x) = ax^{a-1} \quad f'(x) = 2(1+\sqrt{x}) * \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} * 2x$$

2) Considérez les fonctions $f(x, y)$ suivantes, calculer pour chacun des cas *les* dérivées premières f_x et f_y et les trois dérivées secondes, f_{xx}, f_{yy} et f_{xy} :

$$f(x,y) = e^{x+y} \quad f(x,y) = \sqrt{x+y} \quad f(x,y) = \ln(x+y) \quad f(x,y) = x^a y^b \quad f(x,y) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$$

Commençons par f_x dans chacun des six cas :

$$f_x = e^{x+y} \quad f_x = 1/2\sqrt{x+y} \quad f_x = 1/(x+y) \quad f_x = ax^{a-1}y^b \quad f_x = 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) * (1/2\sqrt{x}) \quad f_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} * 2x$$

Continuons apr f_{xx} dans chacun des six cas, où l'on dérive les expressions que l'on vient d'obtenir encore une fois par rapport à x. Pour la cinquième dérivée, on part d'une expression plus travaillée de $f_x = 1+(\sqrt{y}/\sqrt{x})$. On trouve

$$f_{xx} = e^{x+y} \quad f_{xx} = (1/2)*(-1/2)(x+y)^{-3/2} \quad f_{xx} = -1/(x+y)^2 \quad f_{xx} = a(a-1)x^{a-2}y^b \quad f_{xx} = \frac{-1}{2}\sqrt{y}*x^{-3/2} \quad f_{xx} = (x^2+y^2)^{-1/2} + x * \frac{-1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} * 2x$$

Les dérivées par rapport à y, qu'on note f_y dans chacun des six cas :

$$f_y = e^{x+y} \quad f_y = 1/2\sqrt{x+y} \quad f_y = 1/(x+y) \quad f_y = bx^a y^{b-1} \quad f_y = 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) * (1/2\sqrt{y}) \quad f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} * 2y$$

Continuons apr f_{xx} dans chacun des six cas, où l'on dérive les expressions que l'on vient d'obtenir encore une fois par rapport à x. Pour la cinquième dérivée, on part d'une expression plus travaillée de $f_y = 1+(\sqrt{x}/\sqrt{y})$. On trouve

$$f_{yy} = e^{x+y} \quad f_{yy} = (-1/4) * (x+y)^{-3/2} \quad f_{yy} = -1/(x+y)^2 \quad f_{yy} = b(b-1)x^a y^{b-2} \quad f_{yy} = \frac{-1}{2}\sqrt{x} * y^{-3/2} \quad f_{yy} = (x^2+y^2)^{-1/2} + y * \frac{-1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} * 2y$$

Enfin, f_{yx}, on dérive f_y par rapport à x, cela donne :

On peut bien entendu vérifier que $f_{yx} = f_{xy}$ c'est-à-dire que l'ordre de dérivation importe peu.

3) Reprendre les exemples de la question 2) précédente en calculant le déterminant de la matrice Hessienne $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

dans le premier cas $f = e^{x+y}$**,** $D = e^{x+y}e^{x+y} - (e^{x+y})^2 = 0$

dans le second cas $f = \sqrt{x+y}$**,** $D = (1/2) * (-1/2)(x+y)^{-3/2} * (1/2) * (-1/2)(x+y)^{-3/2} - ((1/2) * (-1/2)(x+y)^{-3/2})^2 = 0$

dans le troisième cas $f = \ln(x+y)$**,** $D = (1/2) * (-1/2)(x+y)^{-3/2} * (1/2) * (-1/2)(x+y)^{-3/2} - ((1/2) * (-1/2)(x+y)^{-3/2})^2 = 0$

dans le quatrième cas $f = x^a y^b$**,** $D = a(a-1)x^{a-2}y^b * b(b-1)x^a y^{b-2} - (abx^{a-1}y^{b-1})^2 = x^{2(a-1)}y^{2(b-1)} * [a(a-1)*b(b-1) - (ab)^2] = ab(1-a-b)x^{2(a-1)}y^{2(b-1)}$

dans le cinquième cas $f = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$**,** $D = \frac{-1}{2}\sqrt{y} * x^{-3/2} \frac{-1}{2}\sqrt{x} * y^{-3/2} - ((1/2\sqrt{y}\sqrt{x}))^2 = 0$

dans le sixième cas $f = (x^2+y^2)^{1/2}$**,** $D = [(x^2+y^2)^{-1/2} + x * \frac{-1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} * 2x] * [(x^2+y^2)^{-1/2} + y * \frac{-1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} * 2y] - (\frac{-1}{4}(x^2+y^2)^{-3/2} * 2y * 2x)^2 = 0$**. En effet, tous les termes se simplifient ; si vous n'arrivez pas à ce dernier calcul, ce n'est pas très grave.**

4) Calculer f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} et $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ pour les fonctions $f(x,y)$ suivantes :

$$f(x,y) = a\ln(x) + b\ln(y) \quad f(x,y) = x^2 - 2xy - 2y \quad f(x,y) = g(x) + h(y)$$

Pour la première fonction $f(x,y) = a\ln(x) + b\ln(y)$

$$\begin{aligned} f_x &= a/x \\ f_y &= b/y, \\ f_{xx} &= -a/x^2, \\ f_{yy} &= -b/y^2, \\ f_{xy} &= 0 \\ D &= -a/x^2 * -b/y^2 = ab/(xy)^2 \end{aligned}$$

Cette fonction est concave.

Pour la seconde fonction $f(x,y) = x^2 - 2xy - 2y$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2y \\ f_y &= -2x - 2 \\ f_{xx} &= 2, \\ f_{yy} &= 0, \\ f_{xy} &= -2 \\ D &= 2 * 0 - (-2)^2 = -4 \end{aligned}$$

Elle n'est pas concave

Pour la troisième fonction $f(x,y) = g(x) + h(y)$

$$\begin{aligned} f_x &= g'(x) \\ f_y &= h'(y) \\ f_{xx} &= g''(x) \\ f_{yy} &= h''(y) \\ f_{xy} &= 0 \\ D &= g''(x) * g''(y) - 0 \end{aligned}$$

Ainsi si g **et** h **sont concaves, alors** f **est concave.**

2 Programmes d'optimisation sans contrainte avec variable continue

1) Dire s'il existe une solution aux programmes d'optimisation suivants, et, s'il y en a, les donner.

$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad 1-e^{x+y}$ OUI ☐ NON☐ ce programme a une solution $x^* =$ $y^* =$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad \sqrt{x+y}-x-y$ OUI ☐ NON☐ ce programme a une solution $x^* =$ $y^* =$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}-x-y$ OUI ☐ NON☐ ce programme a une solution $x^* =$ $y^* =$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad 1-\ln(1+x+y)$ OUI ☐ NON☐ ce programme a une solution $x^* =$ $y^* =$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad x+y-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ OUI ☐ NON☐ ce programme a une solution $x^* =$ $y^* =$

$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad 1-e^{x+y}$ **OUI☐ NON☒ ce programme n'a pas de solution** $x^* =$ $y^* =$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad \sqrt{x+y}-x-y$ **OUI☒ NON☐ ce programme a une solution** $x^* = 0$ $y^* = 1/4$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}-x-y$ **OUI☒ NON☐ ce programme a une solution** $x^* = 1/4$ $y^* = 1/4$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad 1-\ln(1+x+y)$ **OUI☒ NON☐ ce programme a une solution** $x^* = 0$ $y^* = 0$

$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad x+y-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ **OUI☒ NON☐ ce programme a une solution** $x^* = 0$ $y^* = 0$

Le premier programme diverge. En effet pour $f = 1-e^{x+y}$ **On a :**

$$\begin{aligned} f_x &= -e^{x+y} < 0 \\ f_y &= -e^{x+y} < 0 \end{aligned}$$

la fonction est décroissante, la valeur maximale est obtenue quand $x+y \to -\infty$

Le second programme a des solutions. En effet $f = \sqrt{x+y}-x-y$ **peut s'écrire** $f = h(x+y)$ **avec** $h(X) = \sqrt{X}-X$. **Est-ce que cette fonction** h **de une seule variable a un maximum ? On calcule les deux dérivées**

$$\begin{aligned} h' &= 1/(2\sqrt{X})-1 \\ h'' &= -1/(4X\sqrt{X} \end{aligned}$$

La fonction h **est concave, admet un maximum quand** $h' = 0$ **soit quand** $\sqrt{X} = 1/2$ **et** $X = 1/4$**. Donc, il y a plusieurs manières d'arriver au maximum, même une infinité, mais ce programme a une solution.**

Considérons $f = \sqrt{x}+\sqrt{y}-x-y$.

$$\begin{aligned} f_x &= 1/2\sqrt{x}-1 \\ f_y &= 1/2\sqrt{y}-1 \\ f_{xx} &= \tfrac{-1}{4}(x)^{-3/2} \\ f_{yy} &= \tfrac{-1}{4}(y)^{-3/2} \\ f_{xy} &= 0 \\ D &= \tfrac{-1}{4}(x)^{-3/2} * \tfrac{-1}{4}(y)^{-3/2} > 0 \end{aligned}$$

donc la fonction est concave. Elle admet un maximum global quand FOC : $\sqrt{x} = 1/2$ **et** $x = 1/4$ **et** $\sqrt{y} = 1/2$ **et** $y = 1/4$ **Considérons** $f = 1-\ln(1+x+y)$**. Ce programme a une solution, car puisque** $x+y+1 \geq 1$, $f \leq 1$**. La fonction est bornée supérieurement et atteint sa borne en** $x = y = 0$.

Considérons $f = x+y-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$$\begin{aligned} f_x &= 1-2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) * 1/(2\sqrt{x}) = -\sqrt{y}/\sqrt{x} \\ f_y &= -\sqrt{x}/\sqrt{y} \end{aligned}$$

La fonction est décroissante en fonction de x **et de** y**. Elle n'est définie que sur** $x \geq 0$ **et** $y \geq 0$**. Le maximum est obtenu en** $x = 0$ **et en** $y = 0$.

2) Résoudre le programme d'optimisation $\max_{x,y\geq 0} \ \ln(1+x+y)-210xy+10000$ sur excel. On vérifiera que les solutions premières

Dans le tableau excel, on commence par écrire une ligne de chiffres de 0 à 20, et une colonne de 0 à 20. Puis on écrit la formule suivante dans la cellule B2 :

B2 =LN(1+$A2+B$1)-(1/210)*$A2*B$1

On recopie cette formule sur la droite et en dessous pour obtenir

K10 =LN(1+$A10+K$1)-(1/210)*$A10*K$1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	1	1,09	1,38	1,60	1,77	1,92	2,05	2,16	2,26	2,36	2,44	2,51	2,58	2,65	2,71	2,76	2,81	2,86
3	2	1,38	1,59	1,76	1,91	2,03	2,14	2,24	2,32	2,40	2,47	2,53	2,59	2,65	2,70	2,75	2,79	2,83
4	3	1,60	1,76	1,90	2,02	2,13	2,22	2,30	2,37	2,44	2,50	2,55	2,60	2,65	2,69	2,73	2,77	2,80
5	4	1,77	1,91	2,02	2,12	2,21	2,28	2,35	2,41	2,47	2,52	2,56	2,60	2,64	2,68	2,71	2,74	2,77
6	5	1,92	2,03	2,13	2,21	2,28	2,34	2,40	2,45	2,49	2,53	2,57	2,60	2,63	2,66	2,69	2,71	2,73
7	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30	2,40	2,48	2,56	2,64	2,71	2,77	2,83	2,89
8	1	1,09	1,38	1,60	1,77	1,92	2,05	2,16	2,26	2,36	2,44	2,51	2,58	2,65	2,71	2,76	2,81	2,86
9	2	1,38	1,59	1,76	1,91	2,03	2,14	2,24	2,32	2,40	2,47	2,53	2,59	2,65	2,70	2,75	2,79	2,83
10	3	1,60	1,76	1,90	2,02	2,13	2,22	2,30	2,37	2,44	2,50	2,55	2,60	2,65	2,69	2,73	2,77	2,80
11	4	1,77	1,91	2,02	2,12	2,21	2,28	2,35	2,41	2,47	2,52	2,56	2,60	2,64	2,68	2,71	2,74	2,77
12	5	1,92	2,03	2,13	2,21	2,28	2,34	2,40	2,45	2,49	2,53	2,57	2,60	2,63	2,66	2,69	2,71	2,73
13	6	2,05	2,14	2,22	2,28	2,34	2,39	2,44	2,48	2,52	2,55	2,58	2,60	2,62	2,64	2,66	2,68	2,69
14	7	2,16	2,24	2,30	2,35	2,40	2,44	2,47	2,51	2,53	2,56	2,58	2,60	2,61	2,62	2,64	2,64	2,65
15	8	2,26	2,32	2,37	2,41	2,45	2,48	2,51	2,53	2,55	2,56	2,58	2,59	2,60	2,60	2,61	2,61	2,61
16	9	2,36	2,40	2,44	2,47	2,49	2,52	2,53	2,55	2,56	2,57	2,57	2,58	2,58	2,58	2,58	2,57	2,57
17	10	2,44	2,47	2,50	2,52	2,53	2,55	2,56	2,56	2,57	2,57	2,57	2,56	2,56	2,55	2,54	2,53	2,52
18	11	2,51	2,53	2,55	2,56	2,57	2,58	2,58	2,58	2,57	2,57	2,56	2,55	2,54	2,52	2,51	2,49	2,48
19	12	2,58	2,59	2,60	2,60	2,60	2,60	2,60	2,59	2,58	2,56	2,55	2,53	2,52	2,50	2,48	2,45	2,43
20	13	2,65	2,65	2,65	2,64	2,63	2,62	2,61	2,60	2,58	2,56	2,54	2,52	2,49	2,47	2,44	2,41	2,38
21	14	2,71	2,70	2,69	2,68	2,66	2,64	2,62	2,60	2,58	2,55	2,52	2,50	2,47	2,43	2,40	2,37	2,33
22	15	2,76	2,75	2,73	2,71	2,69	2,66	2,64	2,61	2,58	2,54	2,51	2,48	2,44	2,40	2,36	2,32	2,28
23	16	2,81	2,79	2,77	2,74	2,71	2,68	2,64	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,41	2,37	2,32	2,28	2,23
24	17	2,86	2,83	2,80	2,77	2,73	2,69	2,65	2,61	2,57	2,52	2,48	2,43	2,38	2,33	2,28	2,23	2,18
25	18	2,91	2,87	2,83	2,79	2,75	2,70	2,66	2,61	2,56	2,51	2,46	2,41	2,35	2,30	2,24	2,18	2,13
26	19	2,95	2,91	2,86	2,82	2,77	2,72	2,66	2,61	2,55	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,20	2,14	2,07
27	20	3,00	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,67	2,61	2,54	2,48	2,42	2,35	2,29	2,22	2,15	2,09	2,02

Lorsque l'on écrit les conditions premières, on obtient

$$\frac{1}{210}x = \frac{1}{210}y = \frac{1}{1+x+y} \qquad \Longleftrightarrow x = y = 10$$

Mais on se rend compte qu'en $x = y = 10$, on est ni au maximum, ni au minimum de la fonction. Il est donc probable que les conditions secondes ne sont pas vérifiées. On reprend donc le calcul des différentes dérivées pour voir ce point.

$$f = \ln(1+x+y) - \frac{1}{210}xy \tag{1}$$

$$f_x = \frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{210}y \tag{2}$$

$$f_y = \frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{210}x \tag{3}$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{(1+x+y)^2} < 0 \tag{4}$$

$$f_{yy} = \frac{-1}{(1+x+y)^2} < 0 \tag{5}$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{210} \tag{6}$$

$$\Delta = \left(\frac{-1}{(1+x+y)^2}\frac{-1}{(1+x+y)^2}\right) - \left(\frac{-1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{210}^{2}\right) \tag{7}$$

$$= -2\frac{1}{210}(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \left(\frac{-1}{210}\right)^2 < 0 \tag{8}$$

Le déterminant de la matrice hessienne étant négatif, les conditions secondes ne s'appliquent pas, ce que l'on avait vu au premier coup d'oeil dans le fichier excel.

3 Programmes d'optimisation sans contrainte avec variable qualitative

Une firme seule sur le marché d'un bien homogène peut produire un nombre fini et non divisible de biens, à un coût marginal constant égal à 1. Cette firme détermine non seulement la quantité de bien qu'elle produit (en fonction de ses anticipations de vente) mais aussi le prix de vente de ce bien. Il y a cependant une hypothèse de transparence sur ce marché et une règle qui interdit de vendre le bien à des prix différents. **Indiquer la production de cette firme quand Il y a cinq consommateurs, chacun désireux d'une unité du bien dont la disposition marginale à payer est respectivement 1, 3, 5, 7 et 9.**