Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 2 - groupe 127

Optimisation sans contrainte

Automne 2021

Savoirs utiles : Les dérivées standard, l'énoncé des conditions premières, l'énoncé des conditions secondes, optimisation discrète

A savoir, les dérivées des fonctions polynomiales. Si $f = x^n$, alors $f' = nx^{n-1}$, qui se généralise aux fonctions puissance, avec α coefficient réel : si $f = x^\alpha$, alors $f' = \alpha x^{\alpha-1}$. Connaître les dérivées des fonctions logarithme et exponentielle : si $f = \ln(x)$ et $g = e^x$, alors $f' = 1/x$ et $g' = e^x$. Une fois les dérivées des fonctions d'une variable connue, la dérivation des fonctions de plusieurs variables, variable par variable suit les mêmes règles. On repère LA variable selon laquelle on veut dériver, tout le reste est considéré comme des paramètres.	On considère dans ce TD le programme d'optimisation $max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad f(x,y)$ cad que l'on recherche le maximum d'une fonction de deux variables. La condition première $f_x = 0 \qquad f_y = 0$ indique qu'il faut se pencher sur les points (x,y) qui annulent les deux dérivées partielles. Ce focus provient du théorème à connaître selon lequel, si (x,y) est solution du programme d'optimisation, alors $f_x = 0 \qquad f_y = 0$. C'est une condition <u>nécéssaire</u>.	Des conditions secondes indiquent que les candidats qui satisfont les conditions premières sont la solution. Par exemple qd f concave ($f_{xx} \leq 0, f_{yy} \leq 0, f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})2 > 0$), mais de telles conditions ne sont pas toujours vérifiées et conduisent à une étude cas par cas.

1 Dérivées premières et secondes d'une fonction de une ou deux variables

1) Considérez les fonctions $f(x)$ suivantes, calculer pour chacun des cas la dérivée première (notée $f'(x)$) et la dérivée seconde (notée $f''(x)$). $f(x) = e^x \quad f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = \ln(x) \quad f(x) = x^a \quad f(x) = (1+\sqrt{x})^2 \quad f(x) = (1+x^2)^{1/2}$

2) Considérez les fonctions $f(x,y)$ suivantes, calculer pour chacun des cas *les* dérivées premières f_x et f_y et les trois dérivées secondes, f_{xx}, f_{yy} et f_{xy} :

$$f(x,y) = e^{x+y} \quad f(x,y) = \sqrt{x+y} \quad f(x,y) = \ln(x+y) \quad f(x,y) = x^a y^b \quad f(x,y) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$$

3) Reprendre les exemples de la question 2) précédente en calculant le déterminant de la matrice Hessienne $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

4) Calculer f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} et $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ pour les fonctions $f(x,y)$ suivantes :

$$f(x,y) = a\ln(x) + b\ln(y) \quad f(x,y) = x^2 - 2xy - 2y \quad f(x,y) = g(x) + h(y)$$

2 Programmes d'optimisation sans contrainte avec variable continue

1) Dire s'il existe une solution aux programmes d'optimisation suivants, et, s'il y en a, les donner.

$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad 1 - e^{x+y}$	OUI ☐ NON☐	ce programme a une solution	$x^* =$	$y^* =$
$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad \sqrt{x+y} - x - y$	OUI ☐ NON☐	ce programme a une solution	$x^* =$	$y^* =$
$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} - x - y$	OUI ☐ NON☐	ce programme a une solution	$x^* =$	$y^* =$
$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad 1 - \ln(1+x+y)$	OUI ☐ NON☐	ce programme a une solution	$x^* =$	$y^* =$
$max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad x + y - (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$	OUI ☐ NON☐	ce programme a une solution	$x^* =$	$y^* =$

2) Résoudre le programme d'optimisation $\max_{x,y\geq 0} \ \ln(1+x+y) - 210xy + 10000$ sur excel. On vérifiera que les solutions premières sont satisfaites à l'intérieur du rectangle $[0,20] * [0,20]$ (on essayera $x = 10$), on apercevra un paradoxe et on conclura.

3 Programmes d'optimisation sans contrainte avec variable qualitative

Une firme seule sur le marché d'un bien homogène peut produire un nombre fini et non divisible de biens, à un coût marginal constant égal à 1. Cette firme détermine non seulement la quantité de bien qu'elle produit (en fonction de ses anticipations de vente) mais aussi le prix de vente de ce bien. Il y a cependant une hypothèse de transparence sur ce marché et une règle qui interdit de vendre le bien à des prix différents. **Indiquer la production de cette firme quand Il y a cinq consommateurs, chacun désireux d'une unité du bien dont la disposition marginale à payer est respectivement 1, 3, 5, 7 et 9.**

<u>Fin du sujet du TD n° 2 - groupe 127</u>