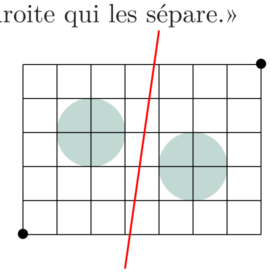
Université de TOURS - L1 Gestion
Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion
Corrigé du TD n° 3
Droite, équations, ensembles convexes
Automne 2020

Les savoirs à revoir pour ce TD : le maniement des équations de toutes sortes, plus particulièrement les relations linéaires, le théorème de séparation des ensembles convexes. Enfin, savoir si des doublets de nombres sont en relation proportionnelle, affine ou inversement proportionnelle : formellement, il s'agit soit de vérifier que ces différents doublets définissent une même pente, soit de trouver la relation (exacte) affine qu'il y a entre eux du type $(x_c, y_c) = \alpha(x_a, y_a) + \beta(x_b, y_b) + (\gamma, \delta)$

On ne peut transformer les membres d'une équation de type $A = B$ que si l'on effectue la même transformation à gauche et à droite de l'équation : $A + x = B + x$ $\lambda A = \lambda B$ où λ multiplicateur scalaire, et x élément des solutions possibles.	Pour que trois points A, B, C soient alignés , il suffit soit que l'un soit le barycentre des deux autres, ce qui revient à dire 1) on peut trouver un coefficient λ tel que $C = \lambda A + (1-\lambda)B$ ou $A = \lambda C + (1-\lambda)B$ ou $B = \lambda A + (1-\lambda)C$, (à ce moment là, il faut trouver le coefficient λ), OU 2) on peut trouver quatre coefficients, a, b, c, d tels que $aA + bB + cC = d$ (à ce moment là, il faut trouver les coefficients a, b, c, d ce qui est parfois très facile). Un autre critère, équivalent est que la pente qui va de A à B égale la pente qui va de B à C. Pour chaque problème concret, vous devez choisir la méthode la plus facile.	Une droite dans le plan délimite deux demi-plans, chacun d'eux défini par l'équation écrite en tant qu'inéquation. Le Théorème de séparation permet de bien visualiser (et séparer) certains problèmes : «Si deux ensembles convexes sont disjoints, il existe toujours au moins une droite qui les sépare.» 

1 Résolutions d'équations avec une variable

1) Résoudre les différentes équations du premier et du second degré suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$x - 1 = 0 \quad y + 3 = 12 \quad y^2 - 2y + a = 0 \quad x - a = 2x + a \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \frac{1}{4}x^2 - 5x + 9 = 0$$

2) Reprendre l'exercice précédent sur un tableur, soit pour vérifier les solutions que vous avez trouvées, soit en utilisant le solveur. Notez toutes les remarques pertinentes qui vous apparaissent.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\ln(x^2 + 4) = 2 \qquad e^{(x^3-1)} = 3 \qquad 3^{x-1} = 13$$

La solution de la première équation est $x = 1$, celle de la seconde, $y = 9$.
Pour la troisième équation, on la réécrit $(y-1)^2 - 1 + a = 0$. Cette équation n'a de solution que si $-1 + a \leq 0$, cad quand $a \leq 1$, et dans ce cas, l'équation se réécrit $(y-1)^2 = 1 - a$ ou encore $y - 1 = \sqrt{1-a}$ soit, $y = 1 + \sqrt{1-a}$.

La quatrième équation a pour solution $x = -2a$

La cinquième équation, du second degré a pour déterminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, elle n'a donc pas de solution.

La sixième équation, du second degré, a pour déterminant $\Delta = 25 - 4 * \frac{9}{4} = 16 = 4^2$. Les deux racines sont donc $\dfrac{5 \pm 4}{1/4} = 20 \pm 16$, cad $S = \{4, 36\}$.

2 Résolution de problèmes avec deux variables

1) Existe-t'il un rectangle dont le périmètre est $60m$ et l'aire $200m^2$? (On pourra accessoirement dénoter par ℓ et L la largeur et la longueur d'un tel rectangle.)

Soit un rectangle de côtés ℓ et L. Les deux variables ℓ et L vérifient le système suivant

$$\begin{aligned} 2\ell + 2L &= 60 \\ \ell * L &= 200 \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \ell &= 30 - L \\ (30 - L) * L &= 200 \end{aligned}$$

L est donc la solution de l'équation du second degré $L^2 - 30L + 200 = 0$. On résout cette équation par la méthode du discriminant : $\Delta = 900 - 800 = 100$, $\sqrt{\Delta} = 10$, les deux racines sont $L = \dfrac{30+10}{2} = 20$ et $\ell = \dfrac{30-10}{2} = 10$

2) Existe-t'il un rectangle dont le périmètre est $60cm$ et l'aire $200cm^2$?

mis à part que la mesure change, le problème est formellement le même. Il existe UN seul rectangle de Longueur 20 cm et de largeur 10cm.

3) Donner les conditions sur les mesures P et A pour qu'il existe un rectangle dont le périmètre est P et l'aire A. On prendra soin d'interpréter la condition obtenue.

Soit un recangle de côtés ℓ et L. Les deux variables ℓ et L vérifient le système suivant

$$\begin{aligned} 2\ell + 2L &= P \\ \ell * L &= A \end{aligned}$$

Par substitution, on a

$$\begin{aligned} ell &= \frac{P}{2} - L \\ (\frac{P}{2} - L) * L &= A \end{aligned}$$

Il existe un rectangle dès lors que la seconde équation de ce système $L^2 - \dfrac{P}{2}L + A$ a une solution. Cette équation quadratique a une solution quand le discriminant n'est pas négatif. Or $\Delta = \dfrac{P^2}{4} - A$. La condition pour qu'il ne soit pas négatif est $A < \dfrac{P^2}{4}$, condition assez intuitive, puisqu'elle dit, étant donné un périmètre, l'aire correspondante ne dépassera jamais un certain seuil.

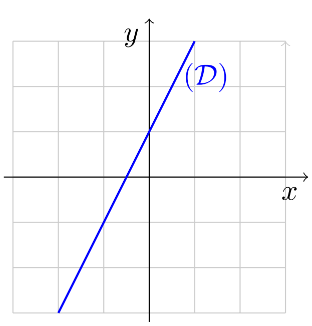
4) Justifier que s'il existe un rectangle dont le périmètre est P et l'aire A, un tel rectangle est unique

L'unicité provient du fait que ce problème se traduit par une équation quadratique qui n'a au plus que deux solutions : le petit côté et le grand côté, soit ... un seul rectangle

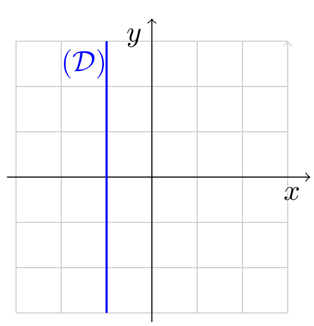
5) Dire pourquoi la question 3) vous a semblé plus simple, dès lors que vous avez résolu la question 1).

3 Plan séparé par une droite

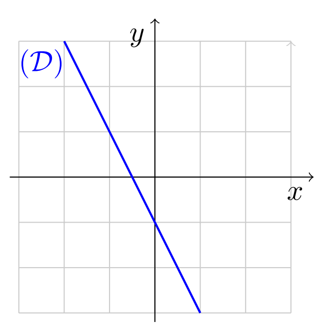
Dans les quatre exemples ci-après, on dessine une droite dans le Plan. Trouver l'équation de la droite représentée, et indiquer l'équation des deux demi-plans que cette droite sépare. La grille proposée est de dimension 1 sur l'axe horizontal, et de 1 sur l'axe vertical.



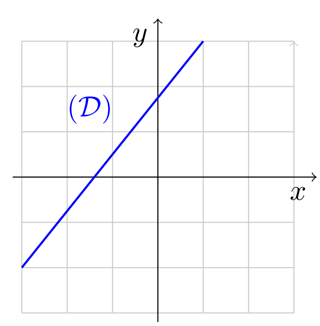
Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4

Dans l'exemple 1, on a une droite croissante, de pente 2 : quand x augmente de 1, y augmente de 2. Elle est donc d'équation $y = 2x + \alpha$. Pour $x = 0$ on trouve $\alpha = 1$. L'équation est $y = 2x + 1$.

Dans l'exemple 2, on a une droite verticale, donc, avec x constant : L'équation est $x = -1$.

Dans l'exemple 3, on a une droite décroissante, de pente -2 : quand x augmente de 1, y diminue de 2. Elle est donc d'équation $y = -2x + \alpha$. Pour $x = 0$ on trouve $-1 = \alpha$. L'équation est $y = -2x - 1$.

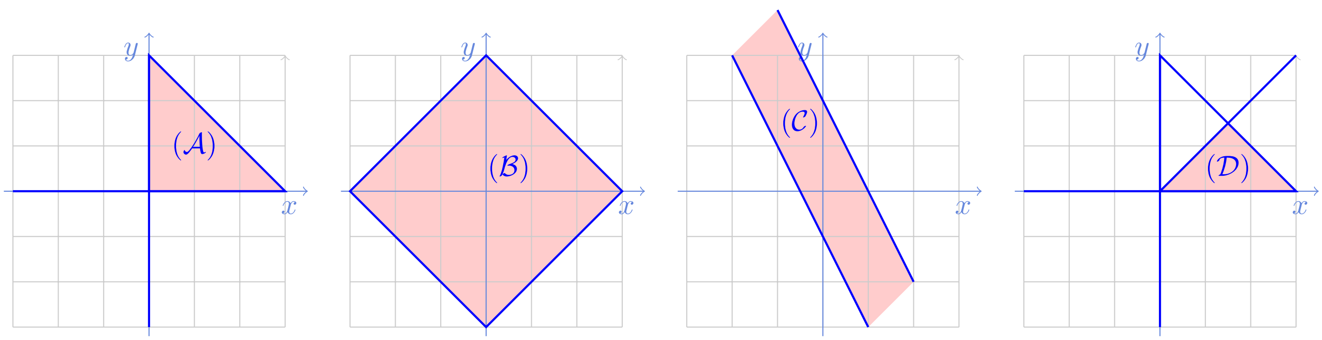
Dans l'exemple 4, on a une droite croissante, de pente 5/4 : quand x augmente de 4, y augmente de 5. Elle est donc d'équation $y = \frac{5}{4}x + \alpha$. Pour $x = 1$ on trouve $3 = \frac{5}{4} + \alpha$, $\alpha = \frac{7}{4}$. L'équation est $y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4} = \frac{5x+7}{4}$.

4 Portions de Plan délimités par des droites

1) Dans les cas suivant, dessiner les ensembles définis par quelques inéquations et dire la forme de l'ensemble obtenu, au cas où la forme de l'ensemble serait reconnaissable.

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & = & \{(x_1, x_2)/ \quad x_1 + x_2 \leq 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\} \\
\mathcal{B} & = & \{(x_1, x_2)/ \quad x_1 + x_2 \leq 3, \quad x_1 + x_2 \geq -3, \quad x_2 - x_1 \leq 3, \quad x_2 - x_1 \geq -3\} \\
\mathcal{C} & = & \{(x_1, x_2)/ \quad 2x_1 + x_2 \leq 2, \quad 2x_1 + x_2 \geq -1\} \\
\mathcal{D} & = & \{(x_1, x_2)/ \quad x_1 + x_2 \leq 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_2 \leq x_1\}
\end{array}$$

On obtient :



$\mathcal{A}$, un triangle $\quad$ $\mathcal{B}$, un losange $\quad$ $\mathcal{C}$, un chemin infini $\quad$ $\mathcal{D}$, un triangle

2) Démontrer les relations d'inclusion suivantes, à partir de la définition des trois ensembles : $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

$\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ C'est évident sur le dessin. Il faut cependant énoncer un argument
Une raison simple est que $\mathcal{D}$ est défini par les mêmes conditions que $\mathcal{A}$ auxquelles on a adjoint une condition supplémentaire. Donc, tout élément de $\mathcal{D}$ est déjà un élément qui vérifie les conditions de $\mathcal{A}$, et donc est élément de $\mathcal{A}$: $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ C'est évident sur le dessin. Il faut cependant énoncer un argument, et celui-ci n'est pas aussi immédiats que dans le cas précédent.
On doit donc démontrer que tout élément (x_1, x_2) de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire qu'il vérifie les quatre conditions qui définissent l'ensemble B, à savoir (i) $x_1 + x_2 \leq 3$, (ii) $x_1 + x_2 \geq -3$, (iii) $x_2 - x_1 \leq 3$ et (iv) $x_2 - x_1 \geq -3$. Montrons ces quatre conditions en partant des propriétés que vérifient (x_1, x_2) en appartenant à $\mathcal{A}$:

(i) La condition (i) est une condition qui est par définition vérifiée par tout élément de $\mathcal{A}$;

(ii) En se souvenant que $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, il vient $x_1 + x_2 \geq 0$ et donc a fortiori $x_1 + x_2 \geq -3$ (puisque $0 \geq -3$) : la condition (ii) est donc bien vérifiée.

(iii) En se souvenant que $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, il vient que $x_2 - x_1 \leq x_2 + x_1 \leq 3$, la première inégalité provenant directement de ce que $x_1 \geq 0$ et la seconde de la première propriété vérifiée par tout élément de $\mathcal{A}$: la condition

(iii) est donc bien vérifiée.

(iv) En se souvenant que $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, il vient que $x_2 - x_1 \geq x_2 \geq 0 \geq 3$, la première inégalité provenant directement de ce que $x_1 \geq 0$, la seconde, de ce que $x_2 \geq 0$, et la troisième, de l'arithmétique élémentaire. Il s'ensuit, par transitivité que condition (iv) est donc bien vérifiée.

Autrement dit, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

5 Relation affine entre trois ou quatre points

1) On veut vérifier une relation linéaire entre deux variables économiques, par exemple profit par salarié π et niveau moyen de salaire w. Dire dans les différents cas suivants où l'on a quatre mesures notées $A = (\pi_A, w_A), B = (\pi_B, w_B), C = (\pi_C, w_C), D = (\pi_D, w_D)$ si une tette relation est vérifiée ou non.

$$\begin{array}{llllllllllll} A & = & (1,2) & B & = & (3,4) & C & = & (5,6) & D & = & (7,8) \\ A & = & (10,2) & B & = & (30,4) & C & = & (50,6) & D & = & (70,8) \\ A & = & (1,2.1) & B & = & (3,4.2) & C & = & (5,6.3) & D & = & (7,8.4) \\ A & = & (1,0) & B & = & (5,3) & C & = & (2,9) & D & = & (4,8) \end{array}$$

Quand il y a une relation proportionnelle ou affine, la calculer et donner, si possible, une interprétation économique sous-jacente.

Premier cas Très clairement, on voit dans le premier cas que $w_i = \pi_i + 1$, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$. La relation linéaire entre les quatre observations est donc établie de ce fait.

La relation affine que l'on obtient, que l'on peut encore écrire $\pi_i = w_i - 1$ n'est pas immédiatement intuitive. Elle nous dit que dans le contexte étudié, plus le salaire est élevé, plus le profit sera élevé. On peut avoir cela dans des modèles assez élaborés dans lesquels le salaire plus élevé induit le salarié à modifier son comportement, en choisissant un niveau de réalisation de ses tâches conduisant à plus de profit.

Second cas Ce cas ressemble un peu au cas précédent. En effet, si on divise par dix la première variable, on est dans le cas précédent. Formellement, on observe que $w = \dfrac{\pi}{10} + 1$, pour les quatre observations, cad une relation linéaire entre les variables π et w.

La relation affine que l'on obtient, que l'on peut encore écrire $\pi_i = 10w_i - 10$ n'est, à l'instar du cas précédent, pas immédiatement intuitive.

Troisième cas Concernant le troisième cas il n'y a pas d'évidence apparente. On calcule donc le taux de variation relatif de q en fonction de π quand on passe de A à B, de B à C, de C à D. Si ces trois taux sont identiques, alors les quatre points sont alignés. On a

$$\tau_{A \to B} = \frac{4,2 - 2,1}{3 - 1} = \frac{2,1}{2} = 1,05 \qquad \tau_{B \to C} = \frac{6,3 - 4,2}{5 - 3} = \frac{2,1}{2} = 1,05 \qquad \tau_{C \to D} = \frac{8,4 - 6,3}{7 - 5} = \frac{2,1}{2} = 1,05;$$

Il ressort de ces calculs que ces quatre points sont alignés, cad qu'il y a bien une relation linéaire entre A, B, C, D. On peut aller un peu plus loin : trouver cette relation.

La relation que l'on obtient, est du type $w_i = \alpha\pi_i + \beta$ On sait déjà d'après le calcul précédent que $\alpha = 1,05$. Il suffit de calculer β à partir de la première observation $A = (1, 2.1)$. Celà donne :

$$2,1 = 1,05 * 1 + \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = 1,05$$

ce qui conduit à la relation $w_i = 1,05(\pi_i + 1)$, que l'on peut revérifier à la main, pour se rassurer

$$\begin{aligned} 2,1 &= 1,05 * (1+1) \\ 4,2 &= 1,05 * (3+1) \\ 6,3 &= 1,05 * (5+1) \\ 8,4 &= 1,05 * (7+1) \end{aligned}$$

À l'instar du cas précédent, cette relation $\pi_i = \frac{w_i}{1,05}$ n'est pas immédiatement intuitive.

Quatrième cas Pour ce dernier cas, on est pas obligé de calculer les taux de variations. En effet, s'il y a une relation affine entre les variables π et w, le sens de variation de la seconde variable quand la première varie doit être toujours le même (En effet, quand il existe une relation affine entre deux variables, ces deux variables sont soit corrélées positivement, soit corrélées négativement). Or ici, quand on passe de D à B, on pourrait inférer que les deux variables sont corrélées négativement (si on calculait $\tau_{D\to B}$, on trouverait une valeur négative), alors que quand on passe de D à A, on pourrait inférer que les deux variables sont corrélées positivement (si on calculait $\tau_{D\to A}$, on trouverait une valeur positive). Il s'ensuit qu'il n'existe pas de relation simple entre les deux variables π et w.

6 Proportionnalité, liaison affine, inverse proportionnalité

1) Les grandeurs données dans chacun des quatre tableaux ci-dessous sont-elle proportionnelles, en liaison affine ou inversement proportionnelles ?

u	3	8	11
v	0,24	0,64	0,88

r	5	13	18
q	2,5	4,9	6,4

K	2	5	10
L	4	7	28

z	30	80	100
w	40	15	12

Dans cet exercice, il faut exercer le regard des étudiants, commencer par les remarques les plus élémentaires, jusqu'à faire les calculs les plus précis.

Il faut commencer par regarder s'il y a une correlation positive ou négative ou non. Dans le cas u, v, r, q et K, L correlation positive, dans le cas z, w correlation négative. Pas besoin de calcul à cette étape

Il est toujours meilleur de répondre aux questions de ce type en cascade. On étudie donc en premier la proportionnalité.

Proportionalité dans le cas u, v D'abord trouver des indices. On a 11=8+3 et 0,24+0,64=0,88 ; cela pourrait indiquer la proportionnalité. On la vérifie en rajoutant au tableau u, v la ligne v/u

u	3	8	11
v	0,24	0,64	0,88
v/u	0,08	0,08	0,08

Lien affine dans le cas r, q On a ici un indice similaire : 18=5+13. Mais $2,5 + 4,9 = 7,4 \neq 6,4$. On sait déjà qu'il n'y a pas proportionnalité. Pour voir s'il y a un lien affine, cad que les trois points r, q sont alignés, ou non, on calcule alors le coefficient de variation pour aller du premier au second, et le coefficient de variation pour aller du premier au troisième :

$$\tau_{5\to 13} = (4,9 - 2,5)/(13 - 5) = 0,3 \qquad \tau_{5\to 18} = (6,4 - 2,5)/(18 - 5) = 0,3$$

L'égalité de ces deux taux indique que ces points sont en relation affine.

Pas de lien affine dans le cas K, L On vérifie d'abolir qu'il pourrait y avoir proportionnalité sur ce test simple : $2 * 5 = 10$ et $4 * 7 = 28$, mais qu'il n'y a pas sur ce second test $4/2 = 2$ quand $28/10 = 2,8$. On a l'intuition à ce stade qu'il n'y a pas de lien affine, étant donné ces deux tests qui vont dans des sens opposés. On s'en convainc en calculant les coefficient de variation pour aller du premier au second, et du premier au troisième :

$$\tau_{2\to 5} = (7-4)/(5-2) = 1 \qquad \tau_{2\to 10} = (28-4)/(10-2) = 3;$$

Ces deux taux sont différents et les points K et L ne sont pas en liaison affine. <u>L'étudiant pourra s'en convaincre mieux en représentant ces trois points dans l'espace à deux dimensions</u>

Lien inversement proportionnel dans le cas z, w On a déjà remarqué que z, w étaient négativement corrélés. On demande ici s'il existe un lien du type $z = \alpha w$, ce qui revient à une relation $zw = \alpha$. Ce lien apparaît clairement au coup d'oeil, dès qu'on se pose la question avec un rapide calcul mental

$$30 * 40 = 100 * 12 = 1200 \quad \text{et } 80 * 15 = 800 + 400 = 1200$$

<u>Fin du sujet du TD n° 3 - groupe : tous</u>