Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Enoncé du TD n° 3 - groupe 127

Droite, équations, ensembles convexes

Automne 2020

Les savoirs à revoir pour ce TD : le maniement des équations de toutes sortes, plus particulièrement les relations linéaires, le théorème de séparation des ensembles convexes. Enfin, savoir si des doublets de nombres sont en relation proportionnelle, affine ou inversement proportionnelle : formellement, il s'agit soit de vérifier que ces différents doublets définissent une même pente, soit de trouver la relation (exacte) affine qu'il y a entre eux du type $(x_c, y_c) = \alpha(x_a, y_a) + \beta(x_b, y_b) + (\gamma, \delta)$

On ne peut transformer les membres d'une équation de type $A = B$ que si l'on effectue la même transformation à gauche et à droite de l'équation :

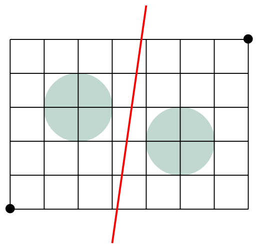
$$A + x = B + x$$

$$\lambda A = \lambda B$$

où λ multiplicateur scalaire, et x élément des solutions possibles.

Pour que trois points A, B, C soient alignés , il suffit soit que l'un soit le barycentre des deux autres, ce qui revient à dire 1) on peut trouver un coefficient λ tel que $C = \lambda A + (1-\lambda)B$ ou $A = \lambda C + (1-\lambda)B$ ou $B = \lambda A + (1-\lambda)C$, (à ce moment là, il faut trouver le coefficient λ), OU 2) on peut trouver quatre coefficients, a, b, c, d tels que $aA + bB + cC = d$ (à ce moment là, il faut trouver les coefficients a, b, c, d ce qui est parfois très facile). Un autre critère, équivalent est que la pente qui va de A à B égale la pente qui va de B à C. Pour chaque problème concret, vous devez choisir la méthode la plus facile.

Une droite dans le plan délimite deux demi-plans, chacun d'eux défini par l'équation écrite en tant qu'inéquation. Le Théorème de séparation permet de bien visualiser (et séparer) certains problèmes : «Si deux ensembles convexes sont disjoints, il existe toujours au moins une droite qui les sépare.»



1 Résolutions d'équations avec une variable

1) Résoudre les différentes équations du premier et du second degré suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$x - 1 = 0 \quad y + 3 = 12 \quad y^2 - 2y + a = 0 \quad x - a = 2x + a \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \frac{1}{4}x^2 - 5x + 9 = 0$$

2) Reprendre l'exercice précédent sur un tableur, soit pour vérifier les solutions que vous avez trouvées, soit en utilisant le solveur. Notez toutes les remarques pertinentes qui vous apparaissent.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\ln(x^2 + 4) = 2 \qquad e^{(x^3-1)} = 3 \qquad 3^{x-1} = 13$$

2 Résolution de problèmes avec deux variables

1) Existe-t'il un rectangle dont le périmètre est $60m$ et l'aire $200m^2$? (On pourra accessoirement dénoter par ℓ et L la largeur et la longueur d'un tel rectangle.)

2) Existe-t'il un rectangle dont le périmètre est $60cm$ et l'aire $200cm^2$?

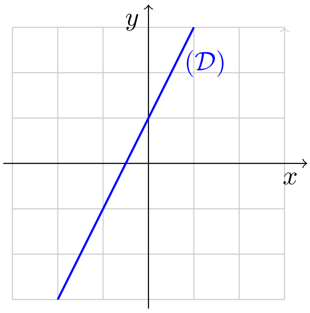
3) Donner les conditions sur les mesures P et A pour qu'il existe un rectangle dont le périmètre est P et l'aire A. On prendra soin d'interpréter la condition obtenue.

4) Justifier que s'il existe un rectangle dont le périmètre est P et l'aire A, un tel rectangle est unique

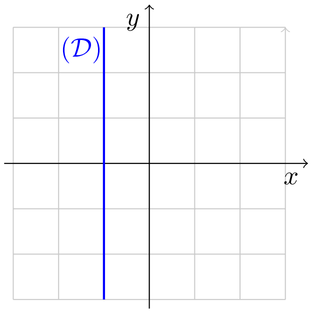
5) Dire pourquoi la question 3) vous a semblé plus simple, dès lors que vous avez résolu la question 1).

3 Plan séparé par une droite

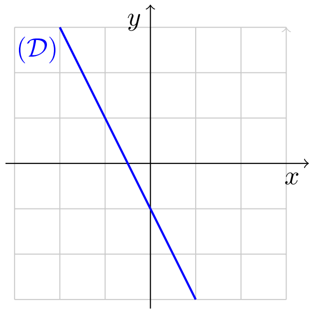
Dans les quatre exemples ci-après, on dessine une droite dans le Plan. Trouver l'équation de la droite représentée, et indiquer l'équation des deux demi-plans que cette droite sépare. La grille proposée est de dimension 1 sur l'axe horizontal, et de 1 sur l'axe vertical.



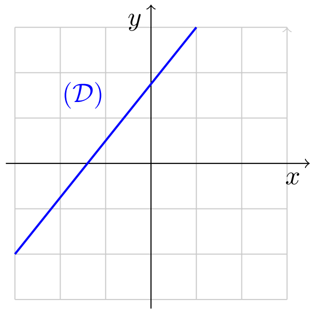
Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4

4 Portions de Plan délimités par des droites

1) Dans les cas suivant, dessiner les ensembles définis par quelques inéquations et dire la forme de l'ensemble obtenu, au cas où la forme de l'ensemble serait reconnaissable.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{(x_1,x_2)/ \quad x_1+x_2 \leq 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\} \\
\mathcal{B} &= \{(x_1,x_2)/ \quad x_1+x_2 \leq 3, \quad x_1+x_2 \geq -3, \quad x_2-x_1 \leq 3, \quad x_2-x_1 \geq -3\} \\
\mathcal{C} &= \{(x_1,x_2)/ \quad 2x_1+x_2 \leq 2, \quad 2x_1+x_2 \geq -1\} \\
\mathcal{D} &= \{(x_1,x_2)/ \quad x_1+x_2 \leq 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_2 \leq x_1\}
\end{aligned}$$

2) Démontrer les relations d'inclusion suivantes, à partir de la définition des trois ensembles : $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

5 Relation affine entre trois ou quatre points

1) On veut vérifier une relation linéaire entre deux variables économiques, par exemple profit par salarié π et niveau moyen de salaire w. Dire dans les différents cas suivants où l'on a quatre mesures notées $A=(\pi_A,w_A), B=(\pi_B,w_B), C=(\pi_C,w_C), D=(\pi_D,w_D)$ si une tette relation est vérifiée ou non.

$$\begin{array}{llllllllllll}
A &=& (1,2) & B &=& (3,4) & C &=& (5,6) & D &=& (7,8) \\
A &=& (10,2) & B &=& (30,4) & C &=& (50,6) & D &=& (70,8) \\
A &=& (1,2.1) & B &=& (3,4.2) & C &=& (5,6.3) & D &=& (7,8.4) \\
A &=& (1,0) & B &=& (5,3) & C &=& (2,9) & D &=& (4,8)
\end{array}$$

Quand il y a une relation proportionnelle ou affine, la calculer et donner, si possible, une interprétation économique sous-jacente.

6 Proportionnalité, liaison affine, inverse proportionnalité

1) Les grandeurs données dans chacun des quatre tableaux ci-dessous sont-elle proportionnelles, en liaison affine ou inversement proportionnelles ?

u	3	8	11
v	0,24	0,64	0,88

r	5	13	18
q	2,5	4,9	6,4

K	2	5	10
L	4	7	28

z	30	80	100
w	40	15	12

Fin du sujet du TD n° 3 - groupe 127