Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 3

Optimisation sans contrainte : Analyse intuitive et analyse avancée

Automne 2021

La compréhension du mécanisme des programmes d'optimisation sans contrainte est un pré-requis essentiel du cours. Les savoirs pour ce TD : Comprendre ce qu'est un programme optimal sans contrainte, ET de manière intuitive ET de manière formelle. Se familiariser avec la notion de fonction bornée supérieurement, et de se familiariser avec différentes méthodes pour montrer qu'une fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^2_+$ est bornée. On considéreral dans ce TD des fonctions continues, dérivables une fois et dont la (ou les) dérivées sont aussi dérivables.

Quand on aborde l'analyse d'un programme d'optimisation, trois cas sont possibles : il existe une ou plusieurs solutions intérieures, il existe une ou plusieurs solutions «en coin», il n'existe pas de solution. On dira le programme divergent s'il n'existe aucune solution, et convergent sinon.	**Résoudre un programme d'optimisation sans contrainte consiste dans une première étape à déterminer si le programme est convergent ou divergent, et la nature de la/des solution(s), s'il en est**	Nous considérerons pour ce TD le programme $\max_{x,y}\ A(x,y)$ où (x,y) sont des éléments de $\mathbb{R}^2$. Résoudre ce programme consiste à analyser la borne supérieure de la fonction f. Si la fonction n'est pas bornée, on dira que le programme n'a pas de solution ou qu'il diverge. Si la fonction est bornée, sous l'hypothèse qu'elle est continue, on trouve toujours une solution au programme de maximisation.	Dans un problème d'optimisation à une variable, lorsque l'ensemble sur lequel on recherche la variable va jusqu'à l'infini, si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la fonction est croissante, alors, s'il y a un maximum, il ne peut pas être après ce seuil.	Il est toujours possible d'appliquer la méthode d'analyse du programme d'optimisation, l'écriture des FOC et des conditions secondes, sans même savoir si la fonction est bornée supérieurement ou non, mais, il est mieux d'avoir une idée sur cette question préalable.

1 Principes vrais, principes faux

Dire parmi les principes suivants ceux qui vous semblent vrais et ceux qui vous semblent faux (trois lignes par principe+graphique)

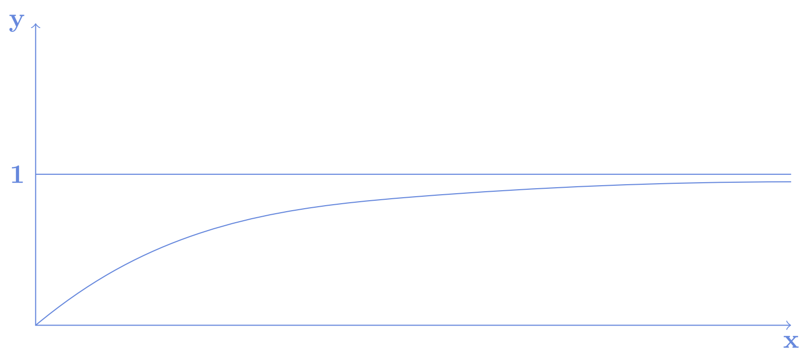
La question pour ces trois principes est de savoir analyser la croissance d'une fonction, quand la variable x devient de plus en plus grande. À quelle condition pourra-t'on dire, si, lorsque la dérivée est croissante à partir d'un certain seuil que la fonction diverge ou converge. A priori on n'a pas assez d'information pour répondre à cette question, sauf quelques cas plus spécifiques,

- **lorsque la dérivée elle-même est supérieure à un certain seuil positif**
- **lorsque la fonction est convexe**

1. Si une fonction d'une variable est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la dérivée est strictement positive, alors la fonction $f(x)$ définie pour $x \geq 0$ n'est pas bornée supérieurement

   Ce principe est faux. En effet, prenez par exemple la fonction $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$, cette fonction est clairement croissante quand $x > 0$, et elle est bornée par 1. On dit parfois que $y = 1$ est son asymptote

   Dans l'exemple ci-après, la fonction est croissante pour $x \geq 0$ et pour autant, elle est bornée supérieurement.

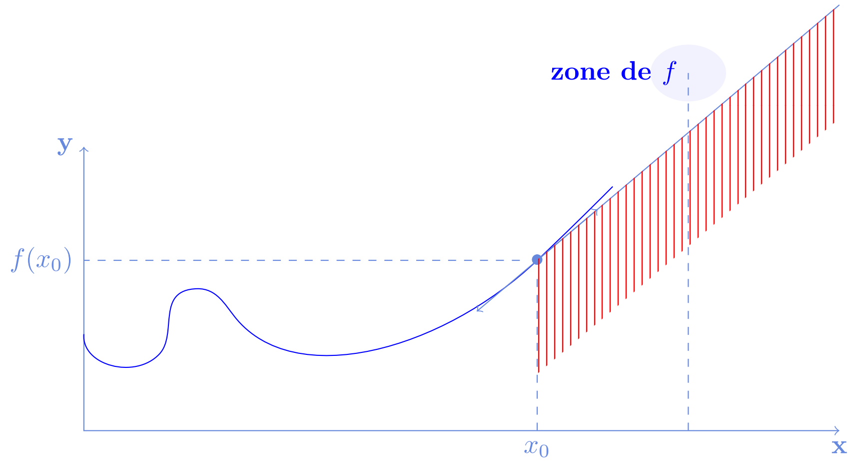


2. Si une fonction d'une variable $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la dérivée est strictement positive, on ne dispose pas d'assez d'information pour indiquer que le programme $\max_{x\geq 0}\ f(x)$ diverge.

Comme on l'a vu, la dérivée positive peut être le fait d'une fonction bornée, ce peut être aussi le fait d'une fonction non bornée, comme par exemple $f(2x) = 2x$ qui peut être aussi grande que l'on veut. Aussi, quand on dit que la dérivée est positive, one ne dispose de pas d'assez d'information pour indiquer que le programme $\max_{x\geq 0}\ f(x)$ diverge ou non. [Le programme est divergent dès lors que la fonction est non bornée.]

3. Si une fonction d'une variable $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la dérivée est strictement positive <u>et supérieure à une valeur $\lambda > 0$</u> [par exemple, $x \geq x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0)$], on dispose d'assez d'information pour indiquer que le programme $\max_{x\geq 0}\ f(x)$ diverge.

   La réponse est OUI. Regardez le dessin suivant, dans lequel j'ai représenté la fonction f (en bleu) jusqu'au point $(x_0, f(x_0))$ et la droite de pente $f'(x_0)$ passant par ce point :



   AU-DELA de x_0 la croissance de f est caractérisée par une dérivée supérieure à $f'(x_0)$, ce qui signifie que f restera au dessus de la demi droite confondue avec la tangente de f, de pente $f'(x_0)$. ce faisant : f est OBLIGEE de demeurer au-dessus de cette droite $\Rightarrow$ elle est NON BORNEE.

2 Trois programmes à analyser

Pour les programmes suivants, on commencera par regarder intuitivement si les fonctions objectifs sont bornées ou non. Quand c'est possible, vous calculerez le maximum de la fonction. On cherchera systématiquement à développer intuition et argument formel.

$$\max_{x,y\geq 0}\quad e^{x+y} - xy \qquad\qquad \max_{x,y\geq 0}\quad xy - x^{1/2}y^{3/2} \qquad\qquad \max_{x,y>0}\quad \ln(x) + \ln(x+y) - 2x - y$$

1) <u>Premier programme</u> [Elts à considérer] Toujours vrai pour tout réel $r \geq 0$: $e^r > r$. On rappelle : $e = 2,718281828$

On peut avoir assez vite l'intuition que la fonction $f = e^{x+y} - xy$ va tout de même croître assez vite, « l'exponentielle l'emportant sur la variable », pour x et y grands. On formalise cette intuition en calculant les dérivées de f par rapport à chacune des variables. Ici,

$$f_x = e^{x+y} - y = e^x e^y - y \qquad f_y = e^{x+y} - x = e^x e^y - x$$

En utilisant l'inégalité rappelée dans l'énoncé, on trouve que

$$f_x > y(e^x - 1) \qquad f_y > x(e^y - 1)$$

On en déduit que pour $x \geq 1$ et $y \geq 1$

$$f_x > y(e^x - 1) > 1(e - 1) > 1,7 \qquad f_y > x(e^y - 1) > 1(e - 1) > 1,7$$

Et on en déduit donc que la fonction f n'est pas bornée, et que le programme diverge

2) <u>Second programme</u> [Elts à considérer] Une fonction diverge dès qu'elle diverge sur une partie de l'espace.

L'intuition ici pour $f(x,y) = xy - x^{1/2}y^{3/2}$ n'est pas claire. La fonction objectif est écrite avec une certaine homogénéité. x semble l'emporter sur $x^{1/2}$, mais d'un autre côté, $y^{3/2}$ l'emporterait sur y. Ceci dit, il faut se rappeller qu'on a une fonction définie sur les deux variables, et qu'on en recherche le maximum partout. Si par exemple on cherche à neutraliser y en choisissant par exemple $y-1$, les valeurs de la fonction que l'on obtient sont :

$$f(x,1) = x - x^{1/2}$$

et on sait bien que cette fonction diverge, car pour $x > 1$, la dérivée de cette fonction est $1-(1/2x^{1/2})$ est supérieure à 1/2 : en effet, quand $x > 1$, $1-(1/2x^{1/2}) > 1 - 1/2 = 1/2$.

Si on veut formaliser cette idée, à l'instar de l'exemple précédent, on peut travailler sur f_x quand $y = 1$

$$f_x = y - \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{3/2} = 1 - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

et si on considère cette dérivée pour $x > 1$, alors, on aura

$$f_x > 1 - 1/2 = 1/2$$

ce qui suffit pour conclure que la fonction f n'est pas bornée, et que le programme diverge

Le 2e programme diverge

3) <u>Troisième programme</u> [Elts à considérer] Toujours vrai pour tout réel $r > 0$: $\ln(r) < r - 1$.

Soit la fonction $\ln(x) + \ln(x+y) - 2x - y$. On a bien l'impression qu'elle est bornée, x l'emportant sur $\ln(x)$ et xy l'emportant sur $\ln(x+y)$

Pour montrer qu'une fonction est bornée, il n'est pas vraiment utile de chercher à démontrer que les dérivées partielles sont bornées. çà ne suffit pas. L'analyse directe du programme de maximisation pourra éventuellement donner le résultat.

Ici cependant, on peut utiliser l'indication donnée dans l'énoncé, à savoir que le log népérien d'un nombre est toujours inférieur à ce nombre moins 1 ($\ln x \leq x - 1$). On en déduit que que pour $x, y > 0$,

$$f(x,y) = \ln(x) + \ln(x+y) - x - (x+y) = (\ln(x) - x) + (\ln(x+y) - (x+y) \leq -1 - 1 = -2$$

cad que f est bornée supérieurement par -2

Pour trouver le maximum de la fonction, on a deux méthode, soit la méthode systématique, soit, l'intuition. Par exemple, on sait que -2 est toujours au-dessus de $f(x,y)$. Se pourrait-il que cette borne soit atteinte ? C'est pas vraiment clair. A moins de voir que $x = 1$ et $y = 0$ conduit à cette borne. Sinon, On est donc obligé de recourir à la méthode générale d'analyse des programmes d'optimisation sans contrainte.

On calcule donc les dérivées premières, seconde et croisées,

$$f_x = (1/x) + (1/(x+y)) - 2 \quad f_y = 1/(x+y) - 1 \quad f_{xx} = -1/x^2 - 1/(x+y)^2 \quad f_{yy} = -1/(x+y)^2 \quad f_{xy} = -1/(x+y)^2$$

D'où on déduit d'abord les FOC, en écrivant dans l'ordre $f_y = 0$ puis $f_x = 0$:

$$f_y = 0 \Longleftrightarrow 1/(x+y) = 1 \Longleftrightarrow x + y = 1 \qquad f_x = 0 \Longleftrightarrow (1/x) + 1 - 2 = 0 \Longleftrightarrow 1/x = 1 \Longleftrightarrow x = 1$$

d'où l'on déduit que l'unique x, y satisfaisant les conditions premières est $x = 1$, $y = 0$.

Les conditions secondes sont elles vérifiées ? Clairement $f_{xx} < 0$ et $f_{yy} < 0$. Pour le déterminant de la matrice Hessienne, on va le calculer pour les valeurs particulières $x = 1$, $y = 0$.

$$f_{xx} = -1 - 1 = -2 \quad f_{yy} = -1 \quad f_{xy} = -1 \quad \textbf{d'où} \quad \Delta = (-2) * (-1) - (-1)^2 = 2 - 1 = 1 > 0$$

Les conditions secondes sont vérifées. On en déduit que le maximum de la fonction est atteint en $x = 1$ et en $y = 0$.

3 Analyser par étapes un programme d'optimisation

On suppose que (x_A^*, y_A^*) est la solution unique de $\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; A(x,y)$ et que (x_B^*, y_B^*) est la solution unique de $\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; B(x,y)$.

1) Démontrer que la fonction $A(x,y)+B(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}$ est bornée supérieurement.

Le fait que $\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; A(x,y)$ ait une solution prouve que la fonction A est bornée supérieurement. pareillement, la fonction $B(x,y)$ est bornée supérieurement.

2) Dire pourquoi le programme $\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; A(x,y)+B(x,y)$ pourrait ne pas avoir de solution

Donc, si A et B sont définies sur un fermé, et si $A+B$ est bornée supérieurement, existe-t'il un point pour lequel $A+B$ atteint sa limite ? La borne supérieure pourraît être atteinte pour des valeurs extrêmes de x et de y, auquel cas, le programme pourrait ne pas avoir de solution.

3) Démontrer que la solution du programme $\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; A(x,y)+B(x,y)$ est compris dans $[x_m^*, x_M^*]\times[y_m^*, y_M^*]$, avec

$$x_m^* \quad = \quad \min(x_A^*, x_B^*) \quad x_M^* \quad = \quad \max(x_A^*, x_B^*) \quad y_m^* \quad = \quad \min(y_A^*, y_B^*) \quad y_M^* \quad = \quad \max(y_A^*, y_B^*)$$

La somme des fonctions est bornée entre la somme des minima et la somme des maxima. Donc, le maximum est atteint sur ces intervalles.

Fin du corrigé du TD 3