Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 3 - groupe 127

Optimisation sans contrainte : Analyse intuitive et analyse avancée

Automne 2021

La compréhension du mécanisme des programmes d'optimisation sans contrainte est un pré-requis essentiel du cours. Les savoirs pour ce TD : Comprendre ce qu'est un programme optimal sans contrainte, ET de manière intuitive ET de manière formelle. Se familiariser avec la notion de fonction bornée supérieurement, et de se familiariser avec différentes méthodes pour montrer qu'une fonction de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^2_+$ est bornée. On considéreral dans ce TD des fonctions continues, dérivables une fois et dont la (ou les) dérivées sont aussi dérivables.

Quand on aborde l'analyse d'un programme d'optimisation, trois cas sont possibles : il existe une ou plusieurs solutions intérieures, il existe une ou plusieurs solutions «en coin», il n'existe pas de solution. On dira le programme divergent s'il n'existe aucune solution, et convergent sinon.	**Résoudre un programme d'optimisation sans contrainte consiste dans une première étape à déterminer si le programme est convergent ou divergent, et la nature de la/des solution(s), s'il en est**	Nous considérerons pour ce TD le programme $\max_{x,y}\ A(x,y)$ où (x,y) sont des éléments de $\mathbb{R}^2$. Résoudre ce programme consiste à analyser la borne supérieure de la fonction f. Si la fonction n'est pas bornée, on dira que le programme n'a pas de solution ou qu'il diverge. Si la fonction est bornée, sous l'hypothèse qu'elle est continue, on trouve toujours une solution au programme de maximisation.	Dans un problème d'optimisation à une variable, lorsque l'ensemble sur lequel on recherche la variable va jusqu'à l'infini, si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la fonction est croissante, alors, s'il y a un maximum, il ne peut pas être après ce seuil.	Il est toujours possible d'appliquer la méthode d'analyse du programme d'optimisation, l'écriture des FOC et des conditions secondes, sans même savoir si la fonction est bornée supérieurement ou non, mais, il est mieux d'avoir une idée sur cette question préalable.

1 Principes vrais, principes faux

Dire parmi les principes suivants ceux qui vous semblent vrais et ceux qui vous semblent faux (trois lignes par principe+graphique)

1. Si une fonction d'une variable est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la dérivée est strictement positive, alors la fonction $f(x)$ définie pour $x \geq 0$ n'est pas bornée supérieurement
2. Si une fonction d'une variable $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la dérivée est strictement positive, on ne dispose pas d'assez d'information pour indiquer que le programme $\max_{x\geq 0}\ f(x)$ diverge.
3. Si une fonction d'une variable $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et si on démontre qu'à partir d'un certain seuil la dérivée est strictement positive, on dispose d'assez d'information pour indiquer que le programme $\max_{x\geq 0}\ f(x)$ diverge.

2 Trois programmes à analyser

Pour les programmes suivants, on commencera par regarder intuitivement si les fonctions objectifs sont bornées ou non. Quand c'est possible, vous calculerez le maximum de la fonction. On cherchera systématiquement à développer intuition et argument formel.

$$\max_{x,y\geq 0}\ e^{x+y} - xy \qquad \max_{x,y\geq 0}\ xy - x^{1/2}y^{3/2} \qquad \max_{x,y>0}\ \ln(x) + \ln(x+y) - 2x - y$$

1) <u>Premier programme</u> [Elts à considérer] Toujours vrai pour tout réel $r \geq 0$: $e^r > r$. On rappelle : $e = 2,718281828$

2) <u>Second programme</u> [Elts à considérer] Une fonction diverge dès qu'elle diverge sur une partie de l'espace.

3) <u>Troisième programme</u> [Elts à considérer] Toujours vrai pour tout réel $r > 0$: $\ln(r) < r - 1$.

3 Diviser le programme d'analyse d'un programme d'optimisation

On suppose que (x_A^*, y_A^*) est la solution unique de $\max_{x,y\in\mathbb{R}}\ A(x,y)$ et que (x_B^*, y_B^*) est la solution unique de $\max_{x,y\in\mathbb{R}}\ B(x,y)$.

1) Démontrer que la fonction $A(x,y) + B(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}$ est bornée supérieurement.

2) Dire pourquoi le programme $\max_{x,y\in\mathbb{R}}\ A(x,y) + B(x,y)$ pourrait ne pas avoir de solution

3) Démontrer que la solution du programme $\max_{x,y\in\mathbb{R}}\ A(x,y) + B(x,y)$ est compris dans $[x_m^*, x_M^*] \times [y_m^*, y_M^*]$, avec

$$x_m^* = \min(x_A^*, x_B^*) \quad x_M^* = \max(x_A^*, x_B^*) \quad y_m^* = \min(y_A^*, y_B^*) \quad y_M^* = \max(y_A^*, y_B^*)$$

<u>Fin du sujet du TD n° 3 - groupe 127</u>