Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Enoncé du TD n° 4 - groupe 127

Équations, systèmes d'équations, variables corrélées

Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : le maniement des équations de toutes sortes, plus particulièrement les relations linéaires, la résolution de systèmes d'équations, la reconnaissance des propriétés des variables représentées par ces équations (spécifiquement la corrélation des variables).

Une équation d'une variable (dans $\mathbb{R}$) est une définition implicite d'un nombre qu'on note souvent x ; on appelle solution tout nombre qui vérifie l'équation. Une équation peut avoir une ou plusieurs solutions. Deux équations sont équivalentes dès lors qu'elles définissent exactement le même ensemble de solutions. Certaines fois, deux équations sont équivalentes quand on peut leur appliquer une règle de transformation croissante A = B équivaud à f(A) = f(B) lorsque $f(\cdot)$ est croissante.

Deux droites n'ont d'intersection possibles que lorsqu'elles ne sont pas parallèles, condition qui s'écrit formellement lorsque l'on considère le système des deux équations définissant ces droites,

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = m. \end{cases}$$

comme la non nullité du déterminant ($\Delta \neq 0$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

équivalent la non-proportionalité de (a, b) et (c, d).

On dit que deux variables qui sont conjointement définies par une équation sont *corrélées*, lorsqu'il est nécessaire que la deuxième variable augmente, quand la première variable augmente tout en respectant que l'équation demeure vérifiée. Dans le cas contraire, on parlera de *variables corrélées négativement*. Par exemple, dans une équation de deux de type $f(p, q) = 0$, on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$. Les deux variables sont positivement corrélées si les deux dérivées sont de signe opposé, et négativement corrélées si les deux dérivées sont de même signe.

1 Équations avec une ou deux variables

1) Résoudre les différentes équations du premier et du second degré suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$x - a = \pi \quad y + 3 = 12 \quad y^2 - 2y + a = 0 \quad x - a = 2y + a \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \frac{1}{4}x^2 - 5x + 9 = 0$$

2) Dire si les équations suivantes sont équivalentes ou non

$$\begin{array}{ccc} 2x = y + \frac{1}{y} & 2x = y + 1/y & \ln x = \ln y \\ \Longleftrightarrow xy = y + 1 & \Longleftrightarrow y = x + \sqrt{x^2 - 1} & x = y \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y &= 2(L + \ell) \\ xy &= L\ell \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y &= \dfrac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{cases}$$

2 Analyse d'équations avec une variable

1) Donner le nombre de solutions des équations suivantes, sans nécessairement les calculer.

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad x^2 + 7x + 1 = 0 \qquad x^2 + kx + 1 = 0 \quad \text{avec } k > 2$$

2) Indiquer parmi les équations suivantes celles qui sont équivalentes entre-elles, cad que malgré une forme différente, elles définissent exactement le même nombre de solutions

$$\begin{array}{ccccc} (x-1)^2 = 0 & x = 1 & x - 1 = 0 & e^x = e & \ln(x) - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 & \sqrt{x} = 1 & x^3 + x^2 + x = 0 & e^x = 1 & x\ln(x) = 0 \end{array}$$

3) En reprenant les équations précédentes, en les regroupant « par famille » (où une famille d'équation désigne des équations équivalentes, définissant exactement les mêmes solutions), indiquer combien il y a de familles.

3 Résolution de systèmes d'équations par la méthode du déterminant

1) Pour les systèmes suivants, calculer le déterminant, et la solution par la méthode du déterminant

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 4x-y=9. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=630 \\ 18x+30y=14\,220 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-7y=18,8 \\ x-5y=10 \end{cases}$$

4 Variables en lien croissant (corrélées), variables en lien décroissant (corrélées -nt)

Sur tout l'exercice, on suppose $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

1) Dire pour les équations suivantes si les variables p et q sont corrélées, corrélées négativement, ou pas du tout corrélées, ni positivement, ni négativement. On demande de ne pas résoudre les équations, juste de donner une intuition de la chose.

$$pq=10 \qquad p+q=10 \quad pq=p+q \quad \frac{p+q}{pq}=1 \qquad p^2+q=1$$

$$p\sqrt{q}+q\sqrt{p}=1 \quad \ln(p)+q^{3/4}=20 \quad q=\frac{p}{p+q} \qquad p=q \quad \frac{p-C'(q)}{p}=\tfrac{1}{\varepsilon}, \quad \text{avec } c''(q)>0$$

2) En reprenant et en réécrivant les équations précédentes sous la forme $f(p,q)=0$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial q}$, puis, en conclure, si les variables sont ou non corrélées (vérifier ce que vous avez pu dire dans la question précédente). IL EST POSSIBLE QUE POUR CERTAINS DES CAS CONSIDERES, IL SOIT NECESSAIRE DE POUSSER UN PEU PLUS L'ANALYSE, AVANT D'ARRIVER A UNE CONCLUSION.

5 Propriétés conséquentes (et nécessaires) d'une équation

On dit qu'une équation $A=B$ implique une équation $C=D$ si l'ensemble des variables de la seconde équation est inclus dans l'ensemble des variables de la première équation, et si les solutions de la seconde équation correspondent aux solutions de la première équation.

1) Dire quelles sont les implications qui sont justes (et justifier pourquoi, sans nécessairement calculer les solutions).

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 4x-y=9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y=6 \\ 4x-y=11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y=6 \\ 6x-2y=12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$$

2) Dire quelles sont les implications qui sont justes (et justifier pourquoi, sans nécessairement calculer les solutions). On suppose dans cette question $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

$$\big(p+q=pq \Longrightarrow \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1\big) \quad \big(p^2+q=1 \Longrightarrow q^2+p=1\big) \quad \big(q=100-p \Longrightarrow p=100-q\big)$$

$$\big(q=120/p \Longrightarrow p=120/q\big) \quad \big(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}=2 \Longrightarrow p=q=1\big) \qquad \big(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\geq 2 \Longrightarrow p=q=1\big)$$

3) Jean et Paul désirent acheter en commun un lecteur de CD qui coûte 200 €. Les économies de Paul représentent les $\dfrac{4}{5}$de celles de Jean, et s'ils réunissent leurs économies, il leur manque 27,2 € pour pouvoir effectuer leur achat. La séquence logique suivante est-elle correcte ?

$$\text{Énoncé} \iff \begin{cases} y_P+y_J &= 200-27,2 \\ y_P &= \frac{4}{5}y_J \end{cases} \Longrightarrow \quad y_J=96$$

Fin du sujet du TD n° 4 - groupe 127