Université de TOURS - L1 Gestion
Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion
Corrigé du TD n° 4
Équations, systèmes d'équations, variables corrélées
Automne 2022

Les savoirs à revoir pour ce TD : le maniement des équations de toutes sortes, plus particulièrement les relations linéaires, la résolution de systèmes d'équations, la reconnaissance des propriétés des variables représentées par ces équations (spécifiquement la corrélation des variables).

Une équation d'une variable (dans $\mathbb{R}$) est une définition implicite d'un nombre qu'on note souvent x ; on appelle solution tout nombre qui vérifie l'équation. Une équation peut avoir une ou plusieurs solutions. <u>Deux équations sont équivalentes dès lors qu'elles définissent exactement le même ensemble de solutions</u>. Certaines fois, deux équations sont équivalentes quand on peut leur appliquer une règle de transformation croissante A = B équivaud à f(A) = f(B) lorsque $f(\cdot)$ est croissante.

Deux droites n'ont d'intersection possibles que lorsqu'elles ne sont pas parallèles, condition qui s'écrit formellement lorsque l'on considère le système des deux équations définissant ces droites,

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = m. \end{cases}$$

comme la non nullité du déterminant ($\Delta \neq 0$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

équivalent la non-proportionalité de (a, b) et (c, d).

On dit que deux variables qui sont conjointement définies par une équation sont *corrélées*, lorsqu'il est nécessaire que la deuxième variable augmente, quand la première variable augmente tout en respectant que l'équation demeure vérifiée. Dans le cas contraire, on parlera de *variables corrélées négativement*. Par exemple, dans une équation de deux de type $f(p, q) = 0$, on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$. <u>Les deux variables sont positivement corrélées si les deux dérivées sont de signe opposé, et négativement corrélées si les deux dérivées sont de même signe.</u>

1 Équations avec une ou deux variables

1) Résoudre les différentes équations du premier et du second degré suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$x - a = \pi \quad y + 3 = 12 \quad y^2 - 2y + a = 0 \quad x - a = 2y + a \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \frac{1}{4}x^2 - 5x + 9 = 0$$

On trouve

$$x = a + \pi \quad y = 9 \quad y = 1 \pm \sqrt{1 - a} \text{ (si } a < 1) \quad x - 2y = 2a \quad S = \emptyset \quad x = (5 \pm 4) * 2$$

Car $y^2 - 2y + a = (y - 1)^2 + (a - 1)$ ce qui équivaut à $(y - 1)^2 = 1 - a$, équation qui n'a de solution que lorsque $a < 1$, la solution étant telle que $y - 1 = \pm\sqrt{1 - a}$

2) Dire si les équations suivantes sont équivalentes ou non

$$\begin{array}{ccc} 2x = y + \frac{1}{y} & 2x = y + 1/y & \ln x = \ln y \\ \iff xy = y + 1 & \iff y = x + \sqrt{x^2 - 1} & x = y \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = 2(L + \ell) \\ xy = L\ell \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y = \dfrac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{cases}$$

- Prenons l'équation $2x = y + \frac{1}{y}$. Si on la multiple par y à droite et à gauche, elle devient $2xy = y^2 + 1$, ce qui n'a rien à voir avec $xy = y + 1$

- Prenons l'équation $2x = y + \frac{1}{y}$. En multipliant par y et en soustrayant à droite et à gauche $2xy$ cette équation devient $y^2 - 2xy + 1 = 0$ qu'on peut encore écrire $y^2 - 2xy + X^2 + 1 - x^2 = (y - x)^2 + 1 - x^2 = 0$, soit $(y - x)^2 = x^2 - 1$. Cette égalité n'est possible que quand le membre de droite est positif, cad quand $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. On a alors $y - x = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, soit, $y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. L'équivalence n'est pas tout à fait vraie, il manque au moins une solution.

- Prenons l'équation $\ln x = \ln y$. Si on calcule de part et d'autre l'exponentielle du membre de droite et du membre de gauche, on trouve $x = y$. Cependant, là encore, il n'y a. Pas d'équivalence, car on ne peut pas faire le. Chemin inverse, si par exemple x et y sont négatifs.

Prenons le système d'équations $\begin{cases} x &= \dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y &= \dfrac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{cases}$, if we compute $x + y$ we find $2\ell/4 =\neq 2L + 2\ell$, that is enough to say that the two systems are different.

2 Analyse d'équations avec une variable

1) Donner le nombre de solutions des équations suivantes, sans nécessairement les calculer.

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad x^2 + 7x + 1 = 0 \qquad x^2 + kx + 1 = 0 \quad \text{avec } k > 2$$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, car, le nombre $x^2 + 1 \geq 1$ ne peut pas être égal à zéro.

L'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ a une unique solution, car, on peut la réécrire sous la forme $(x + 1)^2 = 0$ dont l'unique solution est $x = -1$.

L'équation $x^2 + 7x + 1 = 0$ a au moins deux solutions. En effet, l'expression $F = x^2 + 7x + 1$ est positive en $x = 0$ et en$x = -5$ (où F vaut respectivement 1 et 9) et est négative en $x = -1$ ($F(-1) = -5$). Aussi, on sait qu'il y a un nombre qui annulle F entre -5 et -1, et un autre nombre qui annulle F entre -1 et 0. Comme par ailleurs F est un trinôme, il n'y a pas plus de deux solutions.

L'équation $x^2 + kx + 1 = 0$ a pour déterminant $\Delta = k^2 - 4 * 1 * 1 = k^2 - 4 = (k - 2)(k + 2) > 0$. Le déterminant étant positif par hypothèse, l'équation a deux solutions.

2) Indiquer parmi les équations suivantes celles qui sont équivalentes entre-elles, cad que malgré une forme différente, elles définissent exactement le même nombre de solutions

$$\begin{array}{ccccc} (x-1)^2 = 0 & x = 1 & x - 1 = 0 & e^x = e & \ln(x) - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 & \sqrt{x} = 1 & x^3 + x^2 + x = 0 & e^x = 1 & x\ln(x) = 0 \end{array}$$

remière famille nsemble des solutions : $X =$ $1\}$	$(x-1)^2 = 0$ $x - 1 = 0$ $e^{x-1} = 1$ $\ln(x) - 1 = 0$ $\sqrt{x} = 1$ $x\ln(x) = 0$	Toutes ces équations ont en commun que seul $x = 1$ les satisfait. Attention, pour la dernière de ces équations, on peut avoir une interprétation différente. En effet, il est possible de montrer que $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui laisserait à penser que $x = 0$ pourrait bien être considéré comme une seconde solution de cette dernière équation.
econde famille nsemble des solutions : $X =$ $-1\}$	$(x+1)^2 = 0$	Toutes ces équations ont en commun que seul $x = -1$ les satisfait.
roisième famille nsemble des solutions : $X =$ $0\}$	$x(x^2 + x + 1) = 0$ $e^x = e^0$	Toutes ces équations ont en commun que seul $x = 0$ les satisfait.

3) En reprenant les équations précédentes, en les regroupant « par famille » (où une famille d'équation désigne des équations équivalentes, définissant exactement les mêmes solutions), indiquer combien il y a de familles.

Formellement 3,mais la réponse 4 me va aussi, en considérant comme à part l'équation $x\ln(x) = 0$.

3 Résolution de systèmes d'équations par la méthode du déterminant

1) Pour les systèmes suivants, calculer le déterminant, et la solution par la méthode du déterminant

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14\,220 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 7y = 18,8 \\ x - 5y = 10 \end{cases}$$

Premier système, $\Delta = -3 - 4 = -7$; $-7x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -14$, d'où $x = 2$; $-7y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 7$, d'où $y = -1$.

Second système, $\Delta = 4 - 3 = 1$; $x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, d'où $x = 3$; $y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$, d'où $y = -4$.

Troisième système, $\Delta = 30 - 18 = 12$; $12x = \begin{vmatrix} 630 & 1 \\ 14220 & 30 \end{vmatrix} = 4680$, d'où $x = 390$; $12y = \begin{vmatrix} 1 & 630 \\ 18 & 14220 \end{vmatrix} = 2\ 880$, d'où $y = 240$.

Quatrième système, $\Delta = -15 + 7 = -8$; $-8x = \begin{vmatrix} 18,8 & -7 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = -24$, d'où $x = -3$; $-8y = \begin{vmatrix} 3 & 18,8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 11,2$, d'où $y = -1,4$.

4 Variables en lien croissant (corrélées), variables en lien décroissant (corrélées -nt)

Sur tout l'exercice, on suppose $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

1) Dire pour les équations suivantes si les variables p et q sont corrélées, corrélées négativement, ou pas du tout corrélées, ni positivement, ni négativement. On demande de ne pas résoudre les équations, juste de donner une intuition de la chose.

$$pq = 10 \qquad p + q = 10 \quad pq = p + q \quad \frac{p+q}{pq} = 1 \qquad p^2 + q = 1$$
$$p\sqrt{q} + q\sqrt{p} = 1 \quad \ln(p) + q^{3/4} = 20 \quad q = \frac{p}{p+q} \qquad p = q \quad \frac{p - C'(q)}{p} = \tfrac{1}{\varepsilon}, \quad \text{avec } c''(q) > 0$$

Quand p augmente, q doit diminuer pour que l'équation reste vraie. Cette règle apparaît de manière évidente pour les équations $pq = 10$, $p + q = 10$, $p^2 + q = 1$, $\ln(p) + q^{3/4} = 20$ car les expressions correspondantes sont croissantes à la fois en p et en q.

Quand p augmente, q doit augmenter pour que l'équation reste vraie. Cette règle apparaît de manière évidente pour l'équation $\dfrac{p - C'(q)}{p} = 1 - \dfrac{C'(q)}{p} = \frac{1}{\varepsilon}$ car l'expression $\dfrac{C'(q)}{p}$ est croissante avec q et décroissante avec p.

Pour tous les autres cas, on se rapporte à la résolution (plus systématique) de la question 2

2) En reprenant et en réécrivant les équations précédentes sous la forme $f(p, q) = 0$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial q}$, puis, en conclure, si les variables sont ou non corrélées (vérifier ce que vous avez pu dire dans la question précédente). IL EST POSSIBLE QUE POUR CERTAINS DES CAS CONSIDERES, IL SOIT NECESSAIRE DE POUSSER UN PEU PLUS L'ANALYSE, AVANT D'ARRIVER A UNE CONCLUSION.

Equation $pq = 10$ on a $f = pq - 10$, $\dfrac{\partial f}{\partial p} = q \geq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial q} = p \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $p + q = 10$ on a $f = p + q - 10$, $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 1 \geq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial q} = 1 \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $pq = p + q$ on a $f = pq - p - q$, $\dfrac{\partial f}{\partial p} = q - 1 \geq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial q} = p - 1 \geq 0$, *a priori*, ces deux dérivées pourraient ne pas être de même signe, quand $p \geq 1$ et $q \leq 1$ par exemple.

Ici, cependant, en poussant un peu plus loin l'analyse, on remarque que :

$$\frac{\partial f}{\partial p} * \frac{\partial f}{\partial q} = (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 0 + 1 = 1,$$

où l'on a utilisé la condition qui définit implicitement p et q. Il en résulte que les deux deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

<u>Equation $\frac{p+q}{pq} = 1$</u> on a $f = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-1}{p^2} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{-1}{q^2} \leq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

<u>Equation $p^2 + q = 1$</u> on a $f = p^2 + q - 1$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 2p \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = 1 \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

<u>Equation $p\sqrt{q} + q\sqrt{p} = 1$</u> on a $f = p\sqrt{q} + q\sqrt{p} - 1$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \sqrt{q} - q\sqrt{p} = \sqrt{q}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)$, expression qui est négative quand $q \geq 4p$. Pareillement, $\frac{\partial f}{\partial q} = \sqrt{p} - p\sqrt{q} = \sqrt{p}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$, expression qui est négative quand $p \geq 4q$. Ces deux dérivées sont donc parfois de même signe, et parfois de signe opposés, on ne peut pas en conclure d'un point de vue général que les deux variables p et q sont corrélées, positivement ou négativement.

<u>Equation $\ln(p) + q^{3/4} = 20$</u> on a $f = \ln(p) + q^{3/4} - 20$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{p} \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{3}{4}q^{-1/4} \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement.

<u>Equation $q = \frac{p}{p+q}$</u> on a $f = q - \frac{p}{p+q} = q - 1 - \frac{q}{p+q}$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-q}{(p+q)^2} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = 1 - \frac{-p}{(p+q)^2} \geq 0$, ces deux dérivées sont de signe opposé, et donc, les deux variables p et q sont corrélées positivement

<u>Equation $p = q$</u> on a $f = p - q$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 1 \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = -1 \geq 0$, ces deux dérivées sont de signe opposé, et donc, les deux variables p et q sont corrélées positivement

<u>Equation $\frac{p - C'(q)}{p} = \frac{1}{\varepsilon}$</u> on a $f = 1 - \frac{C'(q)}{p} - \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-C'(q)}{p^2} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{C''(q)}{p} \geq 0$, ces deux dérivées sont de signe opposé, et donc, les deux variables p et q sont corrélées positivement.

5 Propriétés conséquentes (et nécessaires) d'une équation

On dit qu'une équation $A = B$ implique une équation $C = D$ si l'ensemble des variables de la seconde équation est inclus dans l'ensemble des variables de la première équation, et si les solutions de la seconde équation correspondent aux solutions de la première équation.

1) Dire quelles sont les implications qui sont justes (et justifier pourquoi, sans nécessairement calculer les solutions).

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

La séquence $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$ <u>est FAUSSE</u> car il n'est pas vrai que $3 * 5 + 9 = 5$!

La séquence $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$ <u>est VRAIE</u> car $3 * 5 - 9 = 6$ et $4 * 5 - 9 = 11$!

La séquence $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$ <u>est FAUSSE</u> bien que $3*5-9 = 6$ et $6*5-2*9 = 12$. En effet, les deux premières équations sont proportionnelles, et il y a bien d'autres solutions admissibles, par exemple $x = 2$ et $y = 0$!

2) Dire quelles sont les implications qui sont justes (et justifier pourquoi, sans nécessairement calculer les solutions). On suppose dans cette question $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

$$\begin{array}{ccc} \left(p+q = pq \Longrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) & \left(p^2 + q = 1 \Longrightarrow q^2 + p = 1\right) & \left(q = 100 - p \Longrightarrow p = 100 - q\right) \\ \left(q = 120/p \Longrightarrow p = 120/q\right) & \left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{q} = 2 \Longrightarrow p = q = 1\right) & \left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{q} \geq 2 \Longrightarrow p = q = 1\right) \end{array}$$

<u>JUSTE</u> : $\left(p+q = pq \Longrightarrow \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$. Pour obtenir la seconde équation, on a divisé le membre de gauche et le membre de droite par la quantité pq.

<u>FAUSSE</u> : $\left(p^2 + q = 1 \Longrightarrow q^2 + p = 1\right)$. En effet, $p = 1$, $q = -1$ est solution de l'équation de gauche, mais n'est pas solution de l'équation de droite.

<u>JUSTE</u> : $\left(q = 100 - p \Longrightarrow p = 100 - q\right)$. Pour l'obtenir, on ajouté la quantité q à droite et à gauche, et on a retranché pà droite età gauche. En fait, l'opération que l'on a faite est assez classique. On a inversé une fonction $q = q(p)$ et obtenu une relation de p en fonction de q.

<u>JUSTE</u> : $\left(q = 120/p \Longrightarrow p = 120/q\right)$. Pour l'obtenir, on multiplié la quantité p à droite et à gauche, et on a divisé qà droite età gauche. En fait, l'opération que l'on a faite est assez classique. On a inversé une fonction $q = q(p)$ et obtenu une relation de p en fonction de q.

<u>JUSTE</u> : $\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{q} = 2 \Longrightarrow p = q = 1\right)$. En effet, on doit remarquer en prealkable que l expression de gauche est superieure ou égale à deux, car c et la somme d un nombre et de son inverse. L egalite a deux est obtenue uniquement quand le nombre égale son inverse a savoir ici quan $p/q = q/p$ cad quand $p = q = 1$. il faut en fait un pêu de savoir pour resoudre cette question, néanmoins classique.

<u>FAUSSE</u> : $\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{q} \geq 2 \Longrightarrow p = q = 1\right)$. En effet, le membre de gauche, comme on vient de l expliquer est toujours superier ou egal à deux. +Donc cela n implique pas que nécessairement $p = q = 1$. .

3) Jean et Paul désirent acheter en commun un lecteur de CD qui coûte 200 €. Les économies de Paul représentent les $\dfrac{4}{5}$de celles de Jean, et s'ils réunissent leurs économies, il leur manque 27,2 € pour pouvoir effectuer leur achat. La séquence logique suivante est-elle correcte ?

$$\text{Énoncé} \iff \begin{cases} y_P + y_J & = 200 - 27,2 \\ y_P & = \frac{4}{5} y_J \end{cases} \Longrightarrow \quad y_J = 96$$

Notons yj et yp les montants respectifs des économies de Jean et de Paul. On a $yj + yp = 200 - 27,2 = 172,8$ et par ailleurs, $wp = \frac{4}{5} wj$. Donc l'énoncé s'écrit bien

$$\begin{cases} y_P + y_J & = 200 - 27,2 \\ y_P & = \frac{4}{5} y_J \end{cases}$$

Ici, c'est la méthode de substitution qui est directement suggérée pour résoudre. On substitue donc yp dans la première équation, on a $yj + \frac{4}{5} yj = 172,8$, soit $\frac{9}{5} yj = 172,8$, soit $yj = 172,8 * 5/9 = 92$ et $yp = 76,8$. <u>L'implication $y_J = 96$ este donc VRAIE.</u>

<u>FIN du corrigé du TD 4</u>