Université de TOURS - L1 Gestion

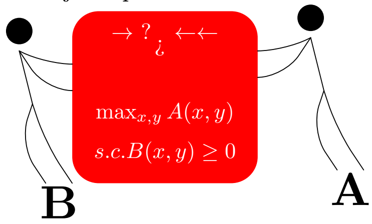
Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 4

Optimisation avec contrainte : Calcul des solutions quand la contrainte est saturée

Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : Savoir analyser le statut de la contrainte : est-elle saturée ou non ? Dans le cas spécifique de la contrainte saturée, savoir écrire les conditions premières (les FOC). Résoudre alors la ou les équations obtenues, comprendre les propriétés des solutions obtenues. On oubliera jamais qu'il y a dans ces différents programmes étudiés beaucoup de cas spécifiques, qui dictent souvent la méthode d'analyse à adopter.

Nous considérerons dans ce TD des problèmes à une variable, de type, $\max_x \ A(x) \ s.c. \ B(x) \geq 0$ et des problèmes à deux variables de type $\max_{x,y} \ A(x,y) \ s.c. \ B(x,y) \geq 0$. Dans ces problèmes, on recherche s'il existe une solution (x dans le premier cas, x,y dans le second cas) qui maximise l'objectif A tout en satisfaisant la contrainte $B \geq 0$. On appelle *solution* toute variable, tout couple de variable qui permet d'atteindre ce maximum. On dira que la contrainte est saturée si elle s'écrit, à l'optimum, $g = 0$.	**Saturation de la contrainte** Quand la contrainte n'est pas saturée, le programme est équivalent au même programme sans la contrainte. Son analyse ressort des méthodes du chapitre maximisation sans contrainte, étudiées dans les 3 premiers TD. Ce TD étudie principalement des cas où la contrainte est saturée, car, dans le cas contraire, on est de fait dans l'analyse de programmes non contraints. On rappelle que la contrainte est saturée, quand il y a une sorte d'opposition entre l'objectif poursuivi et la contrainte. 	**FOC quand la contrainte est saturée** Dans le cas d'un programme à deux variables, on dit que (x, y) satisfait les conditions premières si les conditions $A_x/B_x = A_y/B_y$ sont vérifiées (ce qui implique en particulier que $B_x \neq 0$ et $B_y \neq 0$. On dit encore que (x, y) est un *point stationnaire* du programme. Ces points stationnaires sont essentiels, car il y a un résultat mathématique qui indique que toute solution intérieure du programme est nécessairement un point stationnaire.

1 Programme d'optimisation (triviaux) avec UNE variable et UNE contrainte

On montre à travers quelques exemples les particularités des programmes contraints avec une variable : en particulier, quand la contrainte est saturée, la solution est en coin (et on écrit donc pas les FOC).

1) Résoudre le programme, $\begin{array}{ll} \max_{x \geq 0} & e^x \\ s.c. & x \leq 1 \end{array}$, *[Hint : on vérifiera que la solution est aux bornes]*,

La fonction $f(x) = e^x$ est convexe. Donc, elle diverge quand x est grand. La contrainte désigne $x \in \mathcal{D} = [0, 1]$. On recherche donc le max de la fonction sur cet intervalle. On remarque que la fonction f est croissante. En effet, $f'(x) = e^x > 0$. On en déduit donc qu'elle est maximale quand $x = 1$, cad, comme dit dans l'énoncé, aux bornes de l'intervalle.

2) Résoudre le programme, *[Hint : on vérifiera que la solution est intérieure]*, $\begin{array}{ll} \max_{x \geq 0} & ex - e^x \\ s.c. & x \leq 2 \end{array}$

Ici la fonction à maximiser, $f = e * x - e^x$, est concave. En effet, $f' = e - e^x$ et $f'' = -e^x < 0$. La condition première s'écrit $e = e^x$, ou équivalament $x = 1$. $x = 1$ satisfait la contrainte (qui n'est du coup, pas contraignante), et est donc la solution (intérieure) du programme

3) Résoudre le programme, $\begin{array}{ll} \max_{x \geq 0} & ex - e^x \\ s.c. & x^2 - 1 \leq 0 \end{array}$

La fonction objectif est identique au cas précédent, concave, et a un maximum absolu quand $x = 1$. Est-ce que la valeur de x pour laquelle le maximum est atteint satisfait la contrainte : réponse OUI (car $1^2 - 1 = 0 \leq 0$). Donc, c'est bien la valeur recherchée. Remarquez que l'on aurait pu simplifier la contrainte en l'écrivant $x \leq 1$, mais, ce n'était pas vraiment utile dans ce cas.

2 FOC dans des programmes de DEUX VARIABLES avec contraintes

Considérons les programmes $\max_{x,y} \ A(x,y) s.c. B(x,y) \geq 0$, où $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont définies quand $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\begin{array}{lcll}
\textit{Programme (i)} & : & A(x,y) = x^2 + y^2 & B(x,y) = 10 - 2x - 5y \\
\textit{Programme (ii)} & : & A(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} & B(x,y) = 10 - 2x - 5y \\
\textit{Programme (iii)} & : & A(x,y) = xy & B(x,y) = (10 - 2x - 5y)^2 \\
\textit{Programme (iv)} & : & A(x,y) = \ln(x) + \ln(y) & B(x,y) = 1 - \ln(x) - \ln(y) \\
\textit{Programme (v)} & : & A(x,y) = e^{x+y} & B(x,y) = 10 - 2x - 5y \\
\textit{Programme (vi)} & : & A(x,y) = xy & B(x,y) = 1 - x^2 - y^2
\end{array}$$

1) Calculer les dérivées A_x, A_y, B_x, et B_y et écrire les conditions premières des cinq programmes ci-dessus.

Dans les cas (i), (ii) (v) **et** (vi) **le programme de maximisation sous contrainte du principal admet une solution. On va essayer d'écrire la FOC. Dans le cs (iv) c'est assez inutile d'écrire la FOC puisque le programme est résolu, mais on va tout de même le faire pour voir quelle en est l'interprétation. Le programme (iii) diverge. Il convient donc de ne pas écrire de FOC. On rappelle que lorsque** $A_y \neq 0$ **et** $B_y \neq 0$**, la FOC s'écrit :**

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{B_x}{B_y}$$

.

Dans le programme (i)

$$cas(i) \quad A_x = 2x \quad A_y = 2y \quad B_x = -2 \quad B_y = -5$$

Les FOC sont donc dans ce cas

$$cas(i) \quad A_x/A_y = x/y \quad B_x/B_y = 2/5 \quad 5x - 2y = 0$$

Dans le programme (ii)

$$cas(ii) \quad A_x = 1/2\sqrt{x} \quad A_y = 1/2\sqrt{y} \quad B_x = -2 \quad B_y = -5$$

Les FOC sont donc dans ce cas

$$cas(ii) \quad A_x/A_y = \sqrt{y}/\sqrt{x} \quad B_x/B_y = 2/5 \quad 2\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

Dans le programme (iii)

$$cas(i) \quad A_x = y \quad A_y = x \quad B_x = -4(10 - 2x - 5y) \quad B_y = -10(10 - 2x - 5y)$$

Les FOC sont donc dans ce cas

$$cas(i) \quad A_x/A_y = y/x \quad B_x/B_y = 2/5 \quad 5x - 2y = 0$$

Dans le programme (iv)

$$cas(iv) \quad A_x = 1/x \quad A_y = 1/y \quad B_x = -1/x \quad B_y = -1/y$$

Les FOC sont donc dans ce cas

$$cas(iv) \quad A_x/A_y = y/x \quad B_x/B_y = y/x \quad y/x = y/x$$

Dans le programme (v)

$$cas(v) \quad A_x \quad = \quad e^{x+y} \quad A_y \quad = \quad e^{x+y} \quad B_x \quad = \quad -2 \quad B_y \quad = \quad -5$$

Les FOC sont donc dans ce cas

$$cas(v) \quad A_x/A_y \quad = \quad e^{x+y}/e^{x+y} \quad B_x/B_y \quad = \quad 2/5 \quad 1 \quad = \quad 2/5$$

Dans le programme (vi)

$$cas(vi) \quad A_x \quad = \quad y \quad A_y \quad = \quad x \quad B_x \quad = \quad -2x \quad B_y \quad = \quad -2y$$

Les FOC sont donc dans ce cas

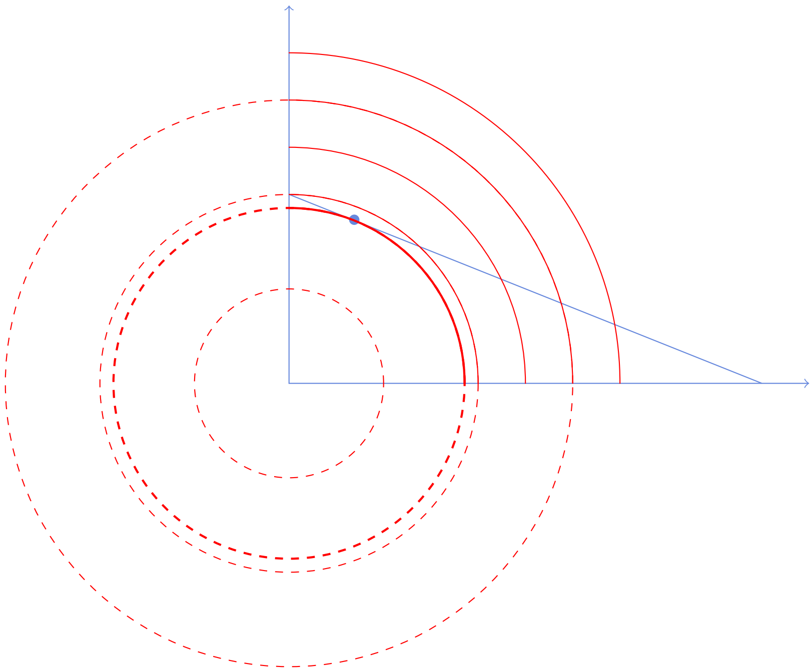
$$cas(vi) \quad A_x/A_y \quad = \quad y/x \quad B_x/B_y \quad = \quad x/y \quad x^2 - y^2 \quad = \quad 0$$

2) Dire, en le justifiant, pourquoi les conditions premières sont pertinentes pour ces problème et conduisent à la solution

Il est nécessaire de procéder cas par cas, et vérifier, s'il y a lieu, qu'on est bien à un maximum.

On peut le faire, soit en attachant une analyse graphique au calcul des conditions premières, soit en exhibant des conditions secondes, par exemple les conditions secondes les plus fréquemment utilisées et qui traduisent l'analyse graphique : « deux nombres (x^*, y^*) satisfaisant les conditions premières sont solution du problème optimal quand les courbes de niveau de f sont concaves dans l'espace x, y et que la contrainte définit un ensemble convexe.

Programme i Ici justement, les courbes de niveau de A se présentent comme des courbes convexes (plus spécifiquement des cercles). Les conditions secondes ne sont pas vérifiées ; Le dessin suivant montre que le point caractérisé par les conditions premières n'est pas le bon car, on peut aller sur des courbes de niveau plus élevées tout en respectant la contrainte. Ainsi donc, les FOC dans ce cas ne sont pas pertinentes



Programme ii On vérifie dans ce cas que les courbees de niveau de la fonction A sont concaves, et par ailleurs, la contrainte, une CB standard, est convexe. Les conditions premirèes sont peertinentees. La solution optimale

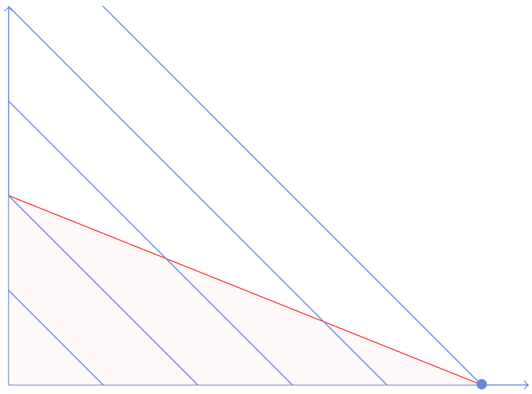
du programme est donc sur la contrainte saturée, et satisfait les conditions premières :

$$\begin{cases} 2x+5y & = 10 \\ 2\sqrt{x}-5\sqrt{y}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^* & = \dfrac{25}{7} \\ y^* & = \dfrac{20}{35} \end{cases}$$

Programme iii Pour ce programme, il convient de réecrire la Contrainte sous la forme $-10 \leq 2x+5y \leq 10$, les FOC sont une représentation standard

Programme iv Les FOC qu'on a écrit semblent ne pas vraiment être utiles. Il faut se pencher sur ce programme qui maximise la quantité $\ln(x)+\ln(y)$ sous la contrainte : $\ln(x)+\ln(y) \leq 1$: Tout couple (x, y) qui satisfiat la contrainte avec égalité sera solution. L'équation $\ln(x)+\ln(y)=1$ se réécrit $\ln(xy)=1$, soit encore $xy=e$ ou encore $y=e/X$. Par exemple le couple $(x=1; y=e)$ est une solution optimale du programme.

Programme v Les courbes de niveau de la fonction A ne sont pas concaves puisque c'est des droites de pente -1, d'équation $x+y=Cste$. Les conditions secondes ne s'appliquent pas. Le graphique nous guide : La solution optimale est en coin, de coordonnée (5,2)



Programme vidans ce programme, la fonction A a des courbees de niveau standard (c'est l'exemple standard Cobb Douglas du cours de micro) et B, le disque unité, définit un ensemble contrainte convexe. Les conditions secondes s'appliquent. La solution optimale est à l'intersection du cercle unité et satisfait la FOC

$$\begin{cases} x^2+y^2 & = 1 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^* & = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y^* & = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

3) Pour comprendre les spécificités du programme (v) qui a 1 solutionen coin, calculer les différentielles dA et dB, et vérifier que $dA > 0$ y compris quand $dB = 0$; Pourquoi cette propriété implique qu'il n'y a pas de solution intérieure ?

La question a pour but de montrer pourquoi dans ce cas la FOC n'este sont pas pertinentes

Pour calculer ces différentielles, il est nécessaire d'avoir les dérivées de A et B par rapport à x et y. Le calcul a déjà été fait : rappellons-le : Dans le programme (v)

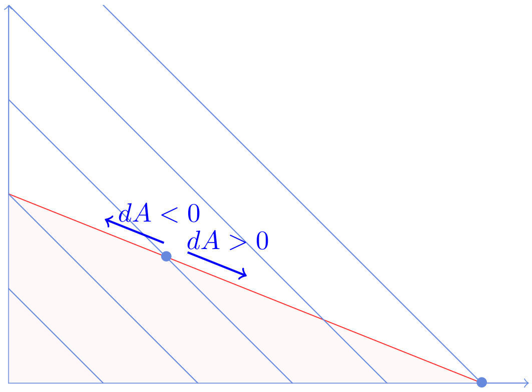
$$cas(v) \quad A_x = e^{x+y} \quad A_y = e^{x+y} \quad B_x = -2 \quad B_y = -5$$

IL s'ensuit que les deux différentielles de A et B sont :

$$dA = e^{x+y}dx + e^{x+y}dy = e^{x+y}(dx+dy) \qquad dB = -2dx - 5dy$$

Il y a une erreur dans la formulation de l'énoncé. Mais le résultat voulu y est : En effet, quand $2dx+5dy=0$, alors la quantité $dx+dy = \frac{1}{2}(2dx+5dy) - \frac{3}{2}dy = -\frac{3}{2}dy$ a un signe qui varie avec le signe de dy. Ainsi, on ne peut

jamais être à l'optimum quand on considère un point intérieur. Il suffit de diminuer dy pour augmenter dA. Graphiquement : il n'est pas possible qu'un point à l'interieur de la ligne frontière de la contrainte puisse être l'optimum, puisque, vers la droite la différentielle est positive.



4) Dans le programme (ii), calculer dA et dB et réécrire la condition $dA = 0$ quand $dB = 0$. Conclure.

La question a pour but de retrouver «manuellement» les FOC

Pour calculer ces différentielles, il est nécessaire d'avoir les dérivées de A et B par rapport à x et y. Le calcul a déjà été fait : rappellons-le : Dans le programme (v)

$$cas(ii) \quad A_x \quad = \quad 1/2\sqrt{x} \quad A_y \quad = \quad 1/2\sqrt{y} \quad B_x \quad = \quad -2 \quad B_y \quad = \quad -5$$

IL s'ensuit que les deux différentielles de A et B sont :

$$dA = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2\sqrt{y}}dy \qquad dB = -2dx - 5dy$$

La question est de savoir s'il existe un point tel que dA s'annulle dès que dB s'annulle. Or $dB = 0$ s'écrit $dy = -\frac{2}{5}dx$. Sous cette condition, on réécrit la différentielle de A :

$$dA = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2\sqrt{y}} * \left(-\frac{2}{5}dx\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)dx$$

La différentielle de A s'annule quand

$$1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

c'est la FOC.

Fin du corrigé du TD 4