Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 4 - groupe 127

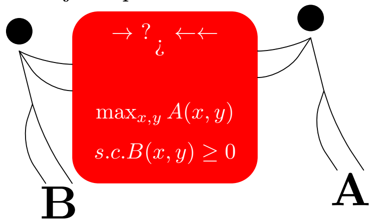
Optimisation avec contrainte : Calcul des solutions quand la contrainte est saturée

Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : Savoir analyser le statut de la contrainte : est-elle saturée ou non ? Dans le cas spécifique de la contrainte saturée, savoir écrire les conditions premières (les FOC). Résoudre alors la ou les équations obtenues, comprendre les propriétés des solutions obtenues. On oubliera jamais qu'il y a dans ces différents programmes étudiés beaucoup de cas spécifiques, qui dictent souvent la méthode d'analyse à adopter.

Nous considérerons dans ce TD des problèmes à une variable, de type, $\max_x \ A(x) \ s.c. \ B(x) \geq 0$ et des problèmes à deux variables de type $\max_{x,y} \ A(x,y) \ s.c. \ B(x,y) \geq 0$. Dans ces problèmes, on recherche s'il existe une solution (x dans le premier cas, x,y dans le second cas) qui maximise l'objectif A tout en satisfaisant la contrainte $B \geq 0$. On appelle *solution* toute variable, tout couple de variable qui permet d'atteindre ce maximum. On dira que la contrainte est saturée si elle s'écrit, à l'optimum, $g = 0$.

Saturation de la contrainte Quand la contrainte n'est pas saturée, le programme est équivalent au même programme sans la contrainte. Son analyse ressort des méthodes du chapitre maximisation sans contrainte, étudiées dans les 3 premiers TD. Ce TD étudie principalement des cas où la contrainte est saturée, car, dans le cas contraire, on est de fait dans l'analyse de programmes non contraints. On rappelle que la contrainte est saturée, quand il y a une sorte d'opposition entre l'objectif poursuivi et la contrainte.



FOC quand la contrainte est saturée Dans le cas d'un programme à deux variables, on dit que (x,y) satisfait les conditions premières si les conditions $A_x/B_x = A_y/B_y$ sont vérifiées (ce qui implique en particulier que $B_x \neq 0$ et $B_y \neq 0$. On dit encore que (x,y) est un *point stationnaire* du programme. Ces points stationnaires sont essentiels, car il y a un résultat mathématique qui indique que toute <u>solution intérieure</u> du programme est <u>nécessairement</u> un <u>point stationnaire</u>.

1 Programme d'optimisation (triviaux) avec UNE variable et UNE contrainte

On montre à travers quelques exemples les particularités des programmes contraints avec une variable : en particulier, quand la contrainte est saturée, la solution est en coin (et on écrit donc pas les FOC).

1) Résoudre le programme, $\begin{array}{ll} \max_{x\geq 0} & e^x \\ s.c. & x \leq 1 \end{array}$, *[Hint : on vérifiera que la solution est aux bornes]*,

2) Résoudre le programme, *[Hint : on vérifiera que la solution est intérieure]*, $\begin{array}{ll} \max_{x\geq 0} & ex - e^x \\ s.c. & x \leq 2 \end{array}$

3) Résoudre le programme, $\begin{array}{ll} \max_{x\geq 0} & ex - e^x \\ s.c. & x^2 - 1 \leq 0 \end{array}$

2 FOC dans des programmes de DEUX VARIABLES avec contraintes

Considérons les programmes $\max_{x,y} \ A(x,y) s.c. B(x,y) \geq 0$, où $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont définies quand $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\begin{array}{lcll}
\textit{Programme (i)} & : & A(x,y) = x^2 + y^2 & B(x,y) = 10 - 2x - 5y \\
\textit{Programme (ii)} & : & A(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} & B(x,y) = 10 - 2x - 5y \\
\textit{Programme (iii)} & : & A(x,y) = xy & B(x,y) = (10 - 2x - 5y)^2 \\
\textit{Programme (iv)} & : & A(x,y) = \ln(x) + \ln(y) & B(x,y) = 1 - \ln(x) - \ln(y) \\
\textit{Programme (v)} & : & A(x,y) = e^{x+y} & B(x,y) = 10 - 2x - 5y \\
\textit{Programme (vi)} & : & A(x,y) = xy & B(x,y) = 1 - x^2 - y^2
\end{array}$$

1) Calculer les dérivées A_x, A_y, B_x, et B_y et écrire les conditions premières des cinq programmes ci-dessus.

2) Dire, en le justifiant, pourquoi les conditions premières sont pertinentes pour ces problème et conduisent à la solution

3) Pour comprendre les spécificités du programme (v) qui a 1 solutionen coin, calculer les différentielles dA et dB, et vérifier que $dA > 0$ y compris quand $dB = 0$; Pourquoi cette propriété implique qu'il n'y a pas de solution intérieure ?

4) Dans le programme (ii), calculer dA et dB et réécrire la condition $dA = 0$ quand $dB = 0$. Conclure.

<u>FIN du sujet du TD n° 4 - groupe 127</u>