Université de TOURS - L1 GESTION

Cours Maths Stats Appliqués à la Gestion

Bref corrigé du TD n° 5 - groupe 127

Automne 2018

# 1 Résolutions d'équations avec une variable

1) Résoudre les différentes équations du premier et du second degré suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$ :

$$x - a = \pi \quad y + 3 = 12 \quad y^2 - 2y + a = 0 \quad x - a = 2y + a \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \frac{1}{4}x^2 - 5x + 9 = 0$$

**On trouve**

$$x = a + \pi \quad y = 9 \quad y = 1 \pm \sqrt{1-a} \ \textbf{(si } a < 1\textbf{)} \quad x - 2y = 2a \quad S = \emptyset \quad x = (5 \pm 4) * 2$$

**Car $y^2 - 2y + a = (y-1)^2 + (a-1)$ ce qui équivaut à $(y-1)^2 = 1 - a$, équation qui n'a de solution que lorsque $a < 1$, la solution étant telle que $y - 1 = \pm\sqrt{1-a}$**

2) Dire si les équations suivantes sont équivalentes ou non

$$\begin{array}{ccc} 2x = y + \frac{1}{y} & 2x = y + 1/y & \ln x = \ln y \\ \iff xy = y + 1 & \iff y = x + \sqrt{x^2 - 1} & x = y \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 2(L + \ell) \\ xy & = & L\ell \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y & = & \dfrac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{array}\right.$$

**- Prenons l'équation $2x = y + \frac{1}{y}$. Si on la multiple par $y$ à droite et à gauche, elle devient $2xy = y^2 + 1$, ce qui n'a rien à voir avec $xy = y + 1$**

**- Prenons l'équation $2x = y + \frac{1}{y}$. En multipliant par $y$ et en soustrayant à droite et à gauche $2xy$ cette équation devient $y^2 - 2xy + 1 = 0$ qu'on peut encore écrire $y^2 - 2xy + X^2 + 1 - x^2 = (y-x)^2 + 1 - x^2 = 0$, soit $(y-x)^2 = x^2 - 1$. Cette égalité n'est possible que quand le membre de droite est positif, cad quand $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. On a alors $y - x = \pm\sqrt{x^2-1}$, soit, $y = x \pm \sqrt{x^2-1}$. L'équivalence n'est pas tout à fait vraie, il manque au moins une solution.**

**- Prenons l'équation $\ln x = \ln y$. Si on calcule de part et d'autre l'exponentielle du membre de droite et du membre de gauche, on trouve $x = y$. Cependant, là encore, il n'y a. Pas d'équivalence, car on ne peut pas faire le. Chemin inverse, si par exemple $x$ et $y$ sont négatifs.**

**Prenons le système d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y & = & \dfrac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{array}\right.$, if we compute $x + y$ we find $2\ell/4 =\neq 2L + 2\ell$, that is enough to say that the two systems are different.**

# 2 Approximation d'une fonction concave

Le but de cet exercice est de vérifier, quand $f$ est une fonction concave, que l'approximation de $f$ par $f + df = f + f_x dx$ est toujours supérieure à $f$.

1) Calculer $df$ en fonction de $dx$ quand $x = 0$ pour

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

**Le cours indique que $df = f_x dx$, où $f_x$ désigne la dérivée de $f$ en zéro, que l'on note $f'(0)$.**

**- Pour la fonction $f = \ln(1+x)$, $f_x = 1/(1+x)$, $f'(0) = 1$, $df = dx$.**

**- Pour la fonction $f = \sqrt{x}$, $f_x = 1/(2\sqrt{x+1})$, $f'(0) = 1/2$, $df = dx/2$.**

**- Pour la fonction $f = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, $f_x = 1 + \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f'(0) = 1$, $df = dx$.**

**- Pour la fonction $f = 1 - x^2$, $f_x = -2x$, $f'(0) = 0$, $df = 0$, ce qu'il n'est pas très correct d'écrire. Il faut à ce stade passer à l'approximation quadratique**

2) Pour savoir si l'approximation de $f$ est au-dessus ou au-dessous de $f$, il nous faut une approximation de $f - f_x dx$, ce qu'on obtient en considérant l'approximation quadratique de $f$. Calculer l'approximation quadratique de $f$ en fonction de $dx$ et de $(dx)^2$ quand $x = 0$ pour

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

**Le cours indique que $df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2$, où $f_{xx}$ désigne la dérivée. seconde de $f$ en zéro, que l'on note encore $f''(0)$.**

**- Pour la fonction $f = \ln(1+x)$, $f_x = 1/(1+x)$, $f_{xx} = -1/(1+x)^2$, $f''(0) = -1$, $df = dx - \frac{1}{2}(dx)^2$.**

**- Pour la fonction $f = \sqrt{x}$, $f_x = 1/(2\sqrt{x+1}) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$, $f_{xx} == \frac{-1}{4}(x+1)^{-3/2}$, $f'(0) = -1/4$, $df = dx/2 - \frac{1}{8}(dx)^2$.**

**- Pour la fonction $f = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, $f_x = +\dfrac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$, $f_{xx} = -2(1+x)^{-3}$, $f''(0) = -2$, $df = dx - (dx)^2$.**

**- Pour la fonction $f = 1 - x^2$, $f_x = -2x$, $f_{xx} = -2$, $f'(0) = -2$, $df = -(dx)^2$, ce qui est maintenant une écriture acceptable .**

3) Vérifier dans chacun des cas précédents que $f$ est concave, et que l'approximation linéaire de $f$ est supérieure à $f$.

**Si on reprend les calculs précédents, on vérifie que $f'' < 0$ dans chacun des cas.**

**Par ailleurs, si on soustrait à $f$ son approximation linéaire, il ne reste plus que le terme $\frac{1}{2} f''(0)(dx)^2 < 0$, puisque la fonction est concave : donc l'approximation linéaire est plus grande que. $f$.**

## 3 Approximations

**Pour cet exercice, on a besoin de connaître les premières décimales de $\pi$. On trouve dans l'énoncé : $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419$.**

1) Définir et donner une approximation de $\pi$ à $10^{-1}$ près puis à $10^{-11}$ près. Soyez très précis dans la définition de cette approximation, dans votre réponse, et dans la motivation de votre réponse.

**Une approximation à $10^{-1}$ près, indique que l'on doit prendre un chiffre après la virgule, mais en arrondissant au 1/10 inférieur si le Nombre est plus proche du 1/10 inférieur, ou au 1/10 supérieur si le Nombre est plus proche du 1/10 supérieur. Ainsi, l'approximation à $10^{-1}$ près, de $1,23$ est $1,2$ tandis que l'approximation à $10^{-1}$ près, de $1,27$ est $1,3$. Pour $\pi$ dont les deux premières décimales sont 14, l'approximation à $10^{-1}$ près est $\pi \approx 3,1$.**

**Pour connaître l'approximation à $10^{-11}$ près, en suivant la même rigoureuse logique, il faut connaître les douze premières décimales de $\pi$, soit $141592653589$. On en déduit que cette approximation ne se finit pas par 8, mais par 9 : on a alors $\pi \approx 3,14159265359$.**

2) Soit une fonction $f$ qui. Vérifie en particulier $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \pi$. Donner une approximation linéaire de $f(2,516)$ à $10^{-2}$ près.

**Donner une approximation linéaire. Entre. Deux points d'une courbe, c'est considérer la corde entre ces deux points, et donner la valeur du point correspondant sur la corde**

**La corde qui passe par les points $(0,0)$ et $(\pi,\pi)$ n'est autre que la première bissectrice, cad le lieu des points pour lesquels la seconde coordonnée égale. La première coordonnée. Ainsi si la première coordonnée est 2,516, la valeur sur la corde sera aussi $2,516$. Si par ailleurs on. Approxime cette valeur à $10^{-2}$ près, on dira que $f(2,516) \approx 2,52$, à $10^{-2}$ près.**

3) Soit une fonction $g$ qui. Vérifie en particulier $g(0) = 0$ et $g(1) = \pi$. Donner une approximation linéaire de $g(1/2)$ à $10^{-2}$ près.

**On trouve une approximation de $g(1/2)$ en cherchant le milieu des points $(0,0)$ et $(1,\pi)$. C'est donc $(1/2, \pi/2)$. On approxime donc $g(1/2)$ par $\pi/2$. Puisqu'on demande le résultat à à $10^{-2}$ près, il faut déjà connaître les trois premières décimales de $\pi/2 = 1,5705...$, donc à $10^{-2}$ près, cela donne $g(1/2) \approx 1,57$.**

## 4 Approximations quadratiques d'une fonction de coût

Soit une entreprise qui produit une quantité $q = 1$ et dont la fonction de coût est : $C = 1 + q^2 \ln(q)$. Donner une approximation quadratique de la fonction de coût autour de $q = 1$. On calculera donc les coefficients $\alpha$ et $\beta$ qui apparaissent dans la formule suivante :

$$C(1 + dq) = C(1) + \alpha dq + \beta(dq)^2$$

**Il faut calculer $C(1)$, $C'(1)$ et $C''(1)$ et on aura l'approximation quadratique $C(1 + dq) = C(1) + C'(1)dq + \frac{1}{2}C''(1)(dq)^2$. Ici $C = 1 + q^2 \ln(q)$, donc $C' = 2q\ln(q) + q^2/q = 2q\ln(q) + q$, et $c'' = 2\ln(q) + 2q/q + 1 = 2\ln(q) + 3$, en 1, on. Trouve $C(1) = 1 + 0 = 1$, $C'(1) = 0 + 1 = 1$ et $C''(1) = 0 + 3 = 3$. Ainsi,**

$$C(1 + dq) = 1 + dq + \frac{3}{2}(dq)^2 \qquad \alpha = 1 \ \beta = 3/2$$

## 5 Questions à rédiger

La fonction de profit d'une firme, quand $p$ est exogène (non choisi par la firme elle-même), $\pi(q) = pq - C(q)$ est concave : quand le coût est convexe, quand elle n'augmente pas énormément à l'infini ; Elle pourrait diminuer quand le coût est très élevé, elle est maximum pour une valeur particulière de $q$ ?

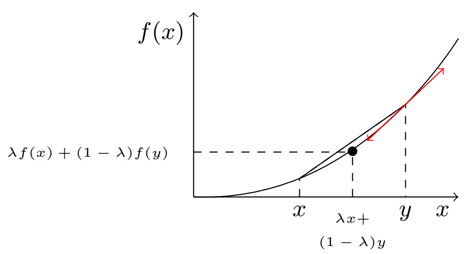
**La fonction de profit est la différence d'une fonction linéaire en $q$ et de la fonction de coût $C(q)$. Son caractère concave ou convexe proviendra uniquement de $-C(q)$ : Ainsi, elle sera concave quand $-C$ sera concave, cad quand $C$ sera convexe.**

**Quand elle est concave, la fonction de profit, quand elle est croissante n'est pas très croissante. Elle peut cependant aller tout de même jusqu'à l'infini.**

**Un profil possible d'une fonction concave est que lorsque $q$ est grand elle soit décroissante. Ceci sera vrai si $C(q) > p$ quand $q$ grand.**

## 6 Convexité

Justifier que la fonction dont la représentation est ci-après est convexe :



**La fonction est. en. Dessous de ses cordes. On voit en effet clairement :**

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

**On voit par ailleurs que $f$ est au-dessus de ses tangentes.**

## 7 Limites

Donner si elles existent la limite quand $x \to 0^+$ des fonctions suivantes (3e cas difficile)

$$x/\ln(1+x) \qquad \ln(1+x)/x \qquad x\ln(x)$$

**- Soit la fonction $x/\ln(1+x)$, elle se présente comme une fraction $f/g$ dont le numérateur $f = x$ et le dénominateur $g = \ln(1+x)$ tendent vers 0. Pour que la. Règle de l'hopital fonctionne il faut que la dérivée du dénominateur ne soit pas nulle. Ici $f' = 1$, $g' = 1/1+x$, $g'(0) = 1$ : la règle de l'Hopital s'applique la limite est $1/1 = 1$.**

**- Soit la fonction $\ln(1+x)/x$, elle se présente comme une fraction $g/f$ dont le dénominateur $f = x$ et le numérateur $g = \ln(1+x)$ tendent vers 0. Pour que la. Règle de l'hopital fonctionne il faut que la dérivée du dénominateur ne soit pas nulle. Ici $f' = 1$, $g' = 1/1+x$, $g'(0) = 1$ : la règle de l'Hopital s'applique la limite est $1/1 = 1$.**

**-Soit la fonction $x\ln(x)$. C'est d'abord, on peut le noter une limite classique en 0 : elle est a priori indéterminée puisque de la forme $0 * -\infty$. Mais on se souvient que c'est le $x$ qui l'emporte. On peut tenter d'utiliser la règle de l'hopital en écrivant la fonction sous la forme : $x/(1/\ln(x))$. La limite a bien alors cette forme indéterminée $f/g$ avec $f = x \to 0$ et $g = 1/\ln(x) \to 0$. La dérivée de $f$ est 1, la dérivé de $g$ : $g' = \dfrac{-1/x}{(\ln(x))^2}$. çà ne marche pas. On reprend dans la suite**
**La fonction $h = x\ln(x)$ a pour dérivée $h' = \ln(x) + x/x = 1 + \ln(x)$ ainsi pour $x < 1/e$ cette dérivée est négative, montrant qu'en zéro, la fonction ne peut pas tendre vers $-\infty$. C'est déjà un premier résultat. Ensuite, on sait que pour $x < 1$, $h < 0$, donc la limite est dans $\mathbb{R}_-$. Or $h(x^2) = xh(x)$. Cette propriété est incompatible avec une limite de $h$ qui serait strictement négative, égale par exemple à $-a$. On trouverait alors $a \approx xa0$, ce qui est impossible quadn $x \to 0$. Donc la limite est 0**

## 8 Elasticité de la demande de marché et opportunités du monopole

Considérons un monopole qui produit et vend un bien, dont la fonction de coût est $C(q)$ convexe, anticipant qu'il ne pourra pas vendre plus de bien au prix $p$ que ne le demande le marché, soit la qté $q = D(p)$. On supposera que $D$ est l'inverse d'une fonction affine $D = 1/(\alpha p + \beta)$ avec $\alpha$ et $\beta$ positifs.

1) Ecrire la fonction de profit $p \to \pi(q)$ en fonction de $C(q)$ et de $D(p)$ (en substituant $q$ par $D(p)$).

$\pi(p) = pD(p) - C(D(p))$

2) Montrer, en calculant sa dérivée seconde, que la fonction $pD(p)$ est concave. Montrer que $D(p)$ est convexe, en déduire que $-C(D(p))$ concave. Conclure que la fonction profit $\pi(p)$ est concave.

**- La fonction $f = pD(p) = p/(\alpha p+\beta) = \dfrac{p+\beta/\alpha - \beta/\alpha}{\alpha p + \beta} = 1/\alpha - \dfrac{\beta/\alpha}{\alpha p+\beta}$ a pour dérifée $f' = \dfrac{\beta}{(\alpha p+\beta)^2}$ et pour dérivée seconde $f'' = \dfrac{-2\alpha\beta/\alpha}{(\alpha p+\beta)^3} < 0$ : elle est concave quand $\alpha, \beta > 0$.**

**- La fonction $D = 1/(\alpha p + \beta)$ a pour dérivée première $-\alpha/(\alpha p+\beta)^2$ et pour dérivée seconde : $2\alpha^2/(\alpha p+\beta)^3 > 0$ : elle est convexe.**

**- On utilise alors le résultat sur la composition de fonctions convexes qui demeure une fonction convexe : $C(D(p))$ est convexe car à la fois $C$ et $D$ sont convexes. On en déduit que l'opposée $-C(D(p))$ est concave.**

- **La fonction profit est la somme de deux fonctions $pD(p)$ et $-C(D(p))$ qui, toutes les deux sont concaves : la fonction profit est donc concave.**

3) Montrer que le prix $p$ qui annule la fonction dérivée $\pi'(p)$ vérifie l'équation

$$\frac{p - C_m}{p} = -\frac{1}{\varepsilon}, \tag{M}$$

Où $C_m = c'(q)$ et $\varepsilon$ est l'élasticité de la demande par rapport au prix.

**La dérivée de la fonction profit est $\pi'(p) = D(p) + pD'(p) - C'(D(p)) * D'(p)$. Elle s'annulle quand $D(p) + D'(p)(p - C_m) = 0$ (On a écrit le terme $C'(D(p))$ sous la forme $C_m$ cad le coût marginal de la firme). Ce que l'on peut encore écrire sous une forme proposée par l'énoncé :**

$$-\frac{D(p)}{pD'(p} = \frac{p - C_m}{p}$$

**On reconnaît dans le terme de gauche l'opposé de l'élasticité de la demande par rapport au prix. En effet, $\varepsilon = \frac{p}{q}q'(p) = \frac{pD'(p)}{D(p)}$.**

**Remarque $\varepsilon < 0$ et donc on en déduit qu'au monopole $p > c_m$, ce qui est une caractéristique du monopole. Le monopole produit un bien qu'il vend plus cher que son coût marginal. Contrairement à la firme en concurrence pure et parfaite qui vend le bien au prix de la dernière unité produite.**

4) Déduire de (M) ce qui se passe quand $\varepsilon$ est très petit puis quand $|\varepsilon|$ est très grand : interpréter le choix du monopole en se souvenant qu'une firme en Concurrence pure et parfaite tarifie au coût marginal.

**Quand $\varepsilon$ est très petit (en valeur absolue) le terme $p - C_m$ est très grand, et le monopole propose vraiment un prix très supérieur au coût marginal. La situation pour le monopole est facilitée par le fait que l'élasticité de la demande est très faible, et donc que s'il augmente les prix, la demande ne faiblira pas beaucoup. Il peut donc augmenter très sensiblemnet ses profits en augmentant le prix, au-delà du cout marginal.**

**Quand $\varepsilon$ est très grand (en valeur absolue) le terme $p - C_m$ est très petit, et le monopole propose un prix qui n'est pas vraiment supérieur au coût marginal. La situation pour le monopole est difficile par le fait que l'élasticité de la demande est très forte, et donc que s'il augmente les prix, la demande chutera dans des proportions telles que son profit pourrait être écorné. Le monopole doit donc être très prudent quand il augmente les prix, et en tout état de cause, en ne considérant que des augmentations faibles au-delà du cout marginal.**

# 9 Variations infinitésimales de deux variables corrélées

Considérons une fonction $f$ définie sur deux variables et dérivable. Soient deux variables $x_1$ et $x_2$ corrélées, vérifiant plus précisément la relation $f(x_1, x_2) = 0$. On suppose plus précisément qu'étant donné $x_1 \in \mathbb{R}_+$, il existe au plus une valeur de $x_2 \in \mathbb{R}_+$, telle que $f(x_1, x_2) = 0$.

On rappelle que la différentielle de $f$ calcule les variations infinitésimales de $f$ quand $x_1$ et $x_2$ varient

$$df = f_{x1}dx1 + f_{x2}dx2,$$

Ou $f_{x1}$ désigne la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_1$ et $f_{x2}$, la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_2$.

1) Expliquer et montrer que la relation entre les deux variables $x_1$ et $x_2$, s'approxime autour de $(x_1, x_2)$ par une relation linéaire entre $dx1$ et $dx2$.

**Par définition les deux variables $x_1$ et $x_2$, sont telles que $f(x_1, x_2) = 0$. Si on se situe en un point ou cette relation est vérifiée, et qu'on regarde les faibles variations de $x_1$ et $x_2$ autour, $x_1 + dx_1$ et $x_2 + dx_2$ telles que la relation est toujours vérifiée, on a : $f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) = 0$ ce qui**

**conduit, en différentiant à $df = 0$ à l'équation $f_{x1}dx1 + f_{x2}dx2 = 0$ ce qui établit formellement une relation linéaire entre$dx_1$ et $dx_2$. CQFD. Interprétation, pour que la relation $f(x_1, x_2) = 0$ continue à être vérifiée autour de $x_1$ et $x_2$, il faut qu'il y ait un certain rapport de proportionalité entre $x_1$ et $x_2$.**

2) Trouver la pente de la relation précédente. Expliquer en quoi cette pente établit localement une échelle de valeur entre la variable $x_1$ et la variable $x_2$.

**le rapport de proportionalité entre $x_1$ et $x_2$ établie par l'égalité $f_{x1}dx1 + f_{x2}dx2 = 0$ est égal à $f_{x1}/f_{x2}$ : dit autrement, les variations autour de $x_1$ et $x_2$ doivent être choisies telles que la valeur relative de $x_1$ soit $f_{x1}/f_{x2}$. Autre interprétation, $f_{x1}/f_{x2}$ est la pente de la tengente de la courbe $f = 0$ en $(x_1, x_2)$.**