Université de TOURS - L1 Gestion
Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion
Corrigé du TD n° 5
Dérivées élémentaires et révisions
Automne 2022

Les savoirs pour ce TD : les dérivées d'une fonction d'une ou plusieurs variables, les dérivées de premier ou de second ordre (dites aussi dérivées premières et dérivées secondes), la traduction en termes de dérivées de fonction croissante ou décroissante et de fonction convexe ou concave.

On note f' la dérivée d'une fonction f. Cette fonction dérivée sert habituellement à quantifier les variations de la fonction f. À connaître : les dérivées des fonctions usuelles 1. une fonction constante a une dérivée nulle 2. une fonction linéaire, $f = \alpha x$ a une dérivée constante $f' = \alpha$ 3. une fonction puissance $f = x^a$ a pour dérivée $f' = ax^{a-1}$ 4. une fonction log $f = \ln(x)$ a pour dérivée $f' = 1/x$ 5. la fonction exp $f = e^x$ a pour dérivée $f' = e^x$	À savoir sans sourciller : Lorsque la dérivée d'une fonction est positive, la fonction est croissante Lorsque la dérivée d'une fonction est négative, la fonction est décroissante Lorsque la dérivée seconde d'une fonction est positive, la fonction est convexe Lorsque la dérivée seconde d'une fonction est négative, la fonction est concave.	Par ailleurs, les règles de dérivation usuelles sur les opérations de fonction doivent être connues 1. $(f+g)' = f' + g'$ 2. $(fg)' = f'g + fg'$ 3. $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ 4. $(f(g))' = f'(g) * g'$	Les dérivations pour les fonctions de deux variables s'opèrent quasi-identiquement : Il faut repérer dans la fonction de deux variables la variable à partir de laquelle on veut dériver la fonction, puis, on dérive cette fonction comme si c'était une fonction de une variable. On notera f_x la dérivée de f par rapport à la variable x et f_y la dérivée de f par rapport à la variable y.

1 Dérivées d'une fonction de une variable

1) Calculer les dérivées des fonctions de une variable suivantes

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

Les dérivées sont dans l'ordre :

$$f' = 1/(1+x) \quad f' = 1/(2\sqrt{x+1}) \quad f' = +\frac{1}{(1+x)^2} \quad f = -2x$$

Pour la troisième en effet, l'écriture puissance conduit directement au résultat

$$f = 1 - (1+x)^{-1} \text{ d'où } f' = 0 - (-1) * (1+x)^{-1-1} = (1+x)^{-2}$$

Pour la quatrième, c'est immédiat. Pour la seconde, en passant en puissance c'est immédiat

2) Calculer les dérivées de fonctions de fonctions suivantes, après avoir écrit deux lignes pour expliquer comment on dérive $f \circ g$.

$$f = (1+2x-x^2)^3 \quad g = (\sqrt{x+1})^2 \quad h = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x}} \quad s = e^{1-x^2}$$

Les dérivées sont dans l'ordre :

$$f' = 3(1+2x-x^2)^2 * (2-2x) \quad g' = (\sqrt{x+1})^2 = 1 = 2(\sqrt{x+1}) * \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \quad h = 1/(2\sqrt{1 - \frac{1}{1+x}}) * \frac{1}{(1+x)^2} \quad s' = e^{1-x^2} * -$$

3) Calculer la dérivée seconde de la fonction $h(x) = f(g(x))$, sachant que les deux fonctions f et g sont dérivables.

On calcule d'abord la dérivée première, puis la dérivée seconde

Dérivée première : $h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$

Dérivée seconde : $h''(x) = f''(g(x)) * (g'(x))^2 + f'(g(x)) * g''(x)$

2 Dérivées d'une fonction de deux variables

1) Calculer les dérivées des fonctions de deux variables suivantes par rapport à x et par rapport à y

$$f = x^2 + y - 1 \qquad g = xy - 1 \qquad h = x + yx - 1 \qquad s = (x-1)(y+1) - 3$$

Concernant les dérivées des fonctions par rapport à x on trouve

$$f_x = 2x + 0 = 2x \qquad g_x = y - 0 = y \qquad h_x = 1 + y - 0 = 1 + y \qquad s_x = (y+1) - 0 = (y+1)$$

Concernant les dérivées des fonctions par rapport à y on trouve

$$f_y = 0 + 1 = 1 \qquad g_y = x - 0 = x \qquad h_y = 0 + x - 0 = x \qquad s_y = (x-1) - 0 = (x-1)$$

2) Calculer les dérivées secondes des fonctions de deux variables suivantes par rapport à x et par rapport à y ainsi que la dérivée croisée. Pour cette dernière on fera tour à tour les deux méthodes, dériver d'abord par rapport à x puis par rapport à y, puis d'abord par rapport à y puis par rapport à x. Vous observerez que vous arrivez au même résultat.

Concernant les dérivées des fonctions par rapport à x, on part de la dérivée qu'on avait calculée par rapport à x, et on redérive par rapport à x, on trouve

$$f_{xx} = 2 \qquad g_{xx} = 0 \qquad h_{xx} = 0 \qquad s_{xx} = 0$$

Concernant les dérivées des fonctions par rapport à y, on part de la dérivée qu'on avait calculée par rapport à y, et on redérive par rapport à y, on trouve

$$f_{yy} = 0 \qquad g_{yy} = 0 \qquad h_{yy} = 0 \qquad s_{yy} = 0$$

Avoir toujours trouvé zéro est un hasard

Concernant les dérivées croisées des fonctions, on part de la dérivée qu'on avait calculée par rapport à x, et on redérive par rapport à y, on trouve

$$f_{xy} = 0 \qquad g_{xy} = 1 \qquad h_{xy} = 1 \qquad s_{xy} = 1$$

Concernant les dérivées croisées des fonctions, on part de la dérivée qu'on avait calculée par rapport à y, et on redérive par rapport à x, on trouve

$$f_{yx} = 0 \qquad g_{yx} = 1 \qquad h_{yx} = 1 \qquad s_{yx} = 1$$

On observe sur ces exemplees une loi très générale selon laquelle pour calculer une dérivée croisée, l'ordre dans lequel on dérive par rapport à chacune des variables importe peu.

3 Résoudre astucieusement une équation

On cherche à résoudre l'équation $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) + 6 = 0$

3) Montrer que $y = 6$ est solution de l'équation $y2 - 11y + 30 = 0$, puis réécrire cette équation sous la forme d'un produit, et en trouver toutes ses solutions.

Il s'agit simplement de calculer :

$$6^2 - 11 * 6 + 30 = 36 - 66 + 30 = 0$$

On peut donc factoriser $y - 6$ dans l'équation initiale ce qui donne,

$$y2 - 11y + 30 = 0 \iff (y - 6)(y - 5) = 0$$

L'équation $y2 - 11y + 30 = 0$ a deux solutions, $y = 6$ et $y = 5$.

4) Après avoir écrit l'équation sous la forme $(x-1)(x+3)(x-2)(x+4) = -6$, on trouvera l'ensemble de ses solutions

L'équation s'écrit encore, $(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)+6 = 0$, soit encore, en développant deux par deux les produits, $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) + 6 = 0$

Définissons une variable auxiliaire $y = x2+2x$; L'équation $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6 = 0$ s'écrit alors $(y-3)(y-8) + 6 = 0$, soit, $y2 - 11y + 24 + 6 = 0$, ou $y2 - 11y + 30 = 0$ dont on sait, par la question précédente qu'elle a deux solutions, $y = 5$ et $y = 6$.

La solution $y = 6$ s'écrit $x^2 + 2x = 6$, soit $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}$

La solution $y = 5$ s'écrit $x^2 + 2x = 5$, soit $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$

En conclusion, l'équation $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6 = 0$ a quatre solutions

$$x = -1 \pm \sqrt{7} \qquad x = -1 \pm \sqrt{6}$$

5) Pouvait-on prédire que l'équation $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6 = 0$ aurait 4 solutions ?

On retiendra qu'un polynome de degré n peut avoir jusqu'à n solutions. Ici le polynome est de degré 4, il aura donc au plus 4 solutions.

On ne peut pas prédire qu'il y a des racines double avant de les avoir calculé

6) La fonction $f = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$ a-t'elle des limites à l'infini ?

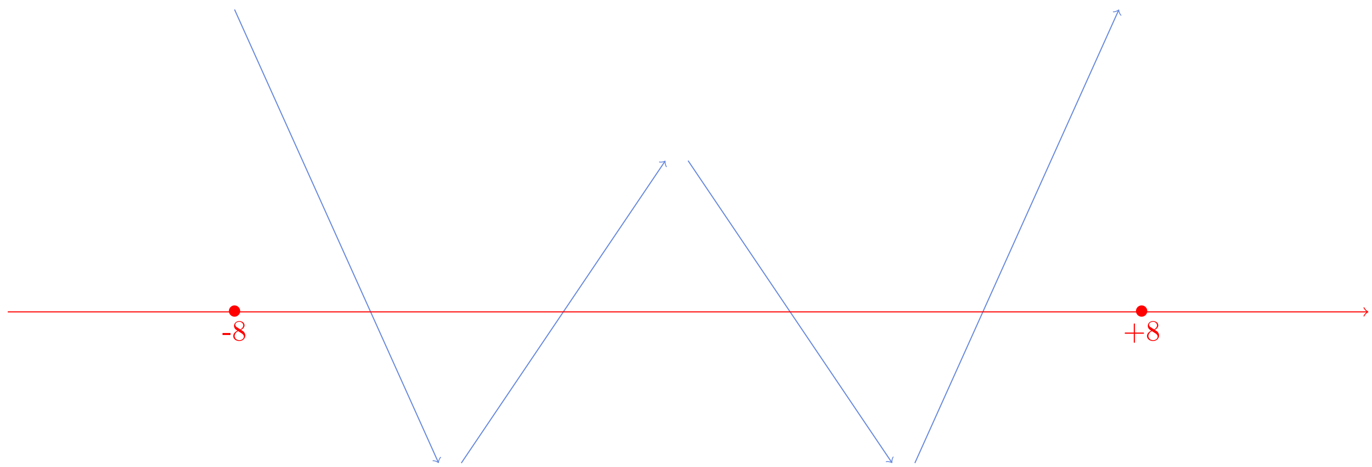
On réécrit la fonction f en factorisant x dans chaque terme :

$$f = x^4\big((1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})(1 + \frac{4}{x}) + \frac{6}{x^4}\big)$$

quand $x \to +\infty$ ou quand $x \to -\infty$, le terme x^4 en facteur tend vers plus l'infini, tandis que chacun des termes $(1 - \frac{1}{x})$, $(1 - \frac{2}{x})$, $(1 + \frac{3}{x})$ et $(1 + \frac{4}{x})$ tend vers 1. Par ailleurs le terme $\frac{6}{x^4}$ tend vers zéro. Ce qui fait que le terme dans la grande parenthèse tend vers 1. $1 * (+\infty) = +\infty$. La fonction diverge donc à l'infini.

7) La fonction $f = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$ est-elle concave ou convexe ?

Difficile de penser qu'une fonction qui passe quatre fois par zéro, dont le profil (guidé par la question précédente) est décroissant croissant décroissant croissant,



soit concave ou convexe.

En effet, une fonction concave est au plus croissante puis décroissante

En effet, une fonction convexe est au plus décroissante puis croissante

4 Relation affine cachée

1) Une variable économique K vérifie l'équation $K = (Q_1+3Q_2)^3 \times L^{-1/5}$ où L, Q_1 et Q_2 sont des réels strictement positifs. Montrer que la variable Q_2 est une fonction affine de la variable Q_1, que l'on déterminera à l'aide des paramètres K et L.

On peut réécrire la définition de K sous une forme équivalente $(Q_1+3Q_2)^3 = KL^{1/5}$ ou encore $Q_1+3Q_2 = K^{1/3}L^{1/15}$, ce qui établit une relation affine entre les deux variables Q_1 et Q_2, quand les paramètres K et L sont fixés, relation qu'on peut encore écrire :

$$Q_2 = -\frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}K^{1/3}L^{1/15}$$

2) Les variables K et L sont liés par la condition $L(K+1) = 12$, doit on en déduire que les variables L et K sont

- ☐ . . . . *proportionnelles ;*
- ☐ . . . . *inversement proportionnelles ;*
- ☐ . . . . *telles que L est une fonction affine de K ;*
- ☐ . . . . *telles que $K+1$ est une fonction affine de L.*

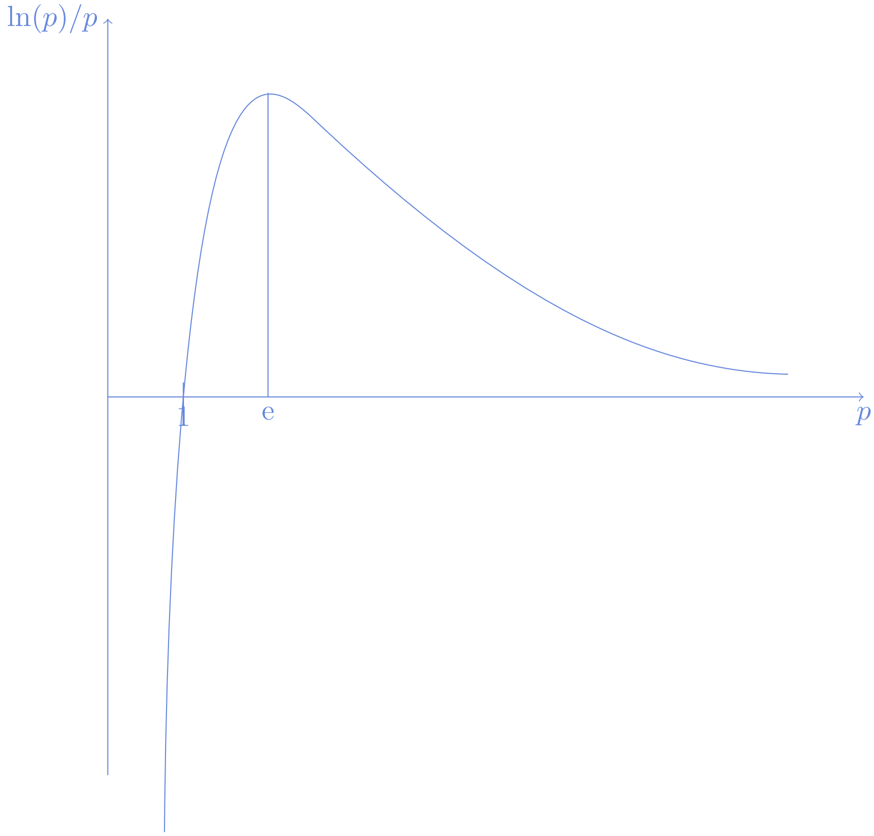
La bonne réponse est que K et L sont inversement proportionnelles, en effet, quand K augmente, le dénominateur de la fraction $\frac{12}{K+1}$ augmente, et cette fraction qui est L diminue : quand K augmente, L diminue, c'est la définition d'inversement proportionnel.

5 Dérivation des variables définies implicitement par une équation

Considérez les deux variables p et q qui sont liées par l'équation $p\ln(q) - q\ln(p) = 0$, sous la condition $p \neq q$.

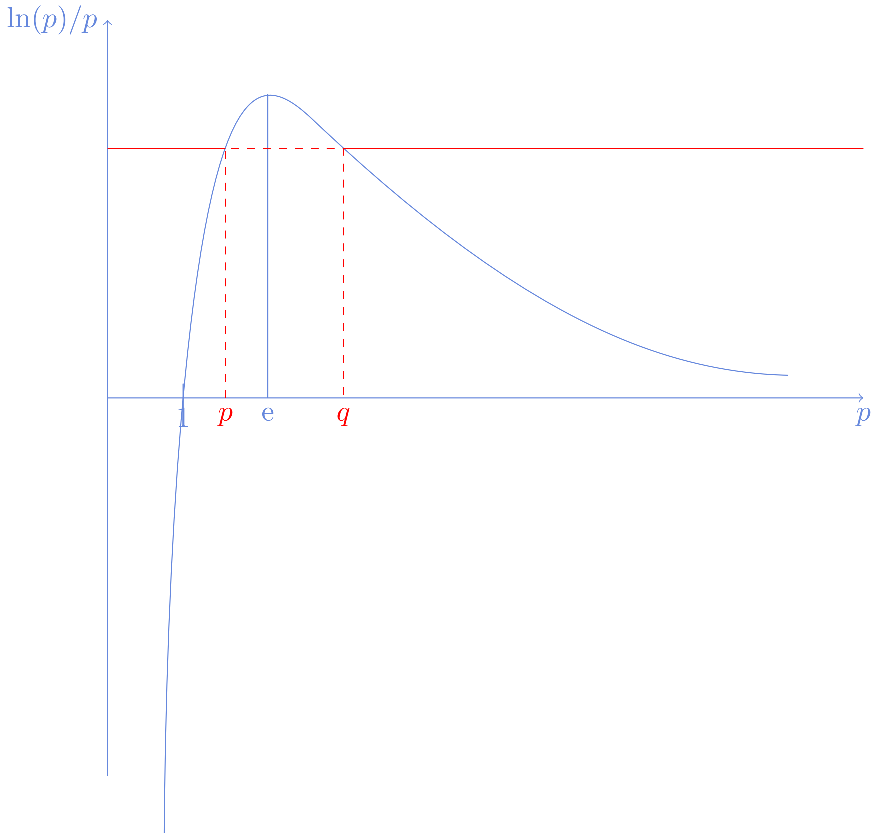
1) Tracer dans la premier temps la fonction $f(p) = \ln(p)/p$ dans un espace p, f

On calculela dérivée, $f' = \frac{1}{p^2}(1-\ln(p))$, dont le signe est positif quand $p < e$ et négatif quand $p > e$ où e désigne le nombre exponentiel vu en cours. On obtient après un tableau de variation montrant que lorsque p est très faible, f tend vers moins l'infini et lorsque p est très élevé, f tend vers 0, le tracé suivant :



2) En déduire que les variables p et q liés par l'équation $p\ln(q) - q\ln(p) = 0$, sous la condition $p \neq q$ sont corrélées négativement.

On déduit du graphique que l'équation $p\ln(q) - q\ln(p) = 0$ implique soit $p = q$, soit q et p sont de part et d'autre du nombre exponentiel (et supérieurs à 1) :



Il est manifeste sur le graphique que lorsque $p < e$ augmente alors $q > e$ diminue et vice-versa, ce qui est le fait de variables corrélées négativement

3) (*) En considérant l'équation $p\ln(q) - q\ln(p) = 0$, sous la condition $q \neq p$, qui définit implicitement q en fonction de p, et en faisant l'hypothèse que la relation $q(p)$ est dérivable, trouver le résultat précédent de corrélation en dérivant l'équation $p\ln(q) - q\ln(p) = 0$ par rapport à p. On notera $q'(p)$ la variation de la variable q par rapport à p.

La dérivée du membre de droite égal à zéro est zéro. La dérivée du membre de gauche se calcule en utilisant les règles de dérivation sur les opérations et en particulier les dérivées des composées de fonction. Par exemple la dérivée de $p\ln(q)$ par rapport à p n'est autre que $1 * \ln(q) + \frac{p}{q} * q'(p)$; Par ailleurs la dérivée de $q\ln(p)$ par rapport à p n'est autre que $\frac{q}{p} - q'(p)\ln(p)$. Du coup, il est toujours vrai que

$$ln(q) + \frac{p}{q} * q'(p) - \left(\frac{q}{p} - q'(p)\ln(p)\right) = 0$$

et, en utilisant les égalités $\ln(q) = \frac{q}{p}\ln(p)$ et $\ln(p) = \frac{p}{q}\ln(q)$, on peut réécrire la précédente égalité :

$$\frac{q}{p}\ln(p) + \frac{p}{q} * q'(p) - \left(\frac{q}{p} - q'(p)\frac{p}{q}\ln(q)\right) = 0,$$

et en mettant les termes avec q' en facteur, à gauche de l'égalité et le reste à droite, on peut écrire :

$$q'\left(\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\ln(q)\right) = \frac{q}{p} - \frac{q}{p}\ln(p) \iff \frac{p}{q}q'\big(1 - \ln(q)\big) = \frac{q}{p}\big(1 - \ln(p)\big)$$

ce qu'on réécrira :

$$q' = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \frac{1 - \ln(p)}{1 - \ln(q)}$$

p et q étant répartis l'un en dessous de e l'autre au-dessus de e, leur logarithme est l'un, en dessous de 1 et l'autre, au-dessus de 1, et on en déduit que la fraction $\frac{1-\ln(p)}{1-\ln(q)}$ est négative, et, en conséquence :

$$q' < 0$$

ce qui est une autre manière d'écrire que les deux variables q et p sont négativement corrélées.

6 Un morceau d'annale

Pour chacune des questions suivantes, vous indiquerez dans la case à droite de la question la réponse.

1) Trouver a et b entre 10 et 90 tels que $10 \leq a \leq b \leq 91$ soient équidistants

La réponse à la question 1 est $a = 37$, $b = 64$
En effet : a et b sont caractérisés par le fait que 10, a, b et 91 soient équidistants, cad que les trois longueurs qui les sépare soient égales : $a - 10 = b - a = 91 - b$,, deux égalités qui forment le système :

$$\begin{cases} a - 10 = b - a \\ b - a = 91 - b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 10 \\ -a + 2b = 91 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 20 \\ -a + 2b = 91 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a = 20 + 91 & a = 37 \\ -37 + 2b = 90 & b = 64 \end{cases}$$

2) Trouver le x pour que les deux suites de nombres $(1, 2, 5)$ et $(7, 14, x)$ soient en relation affine

La réponse à la question 2 est 35
En effet : Ici, on peut appercevoir que s'il y a une relation affine, elle est proportionnelle, car il y a en effet une proportionalité entre les deux premières coordonnées de ces suites de nombres. Le terme de proportionalité nous est donné par le premier membre de chaque suite : ainsi, les termes de la seconde suite sont sept fois les termes de la première suite. On a donc $x = 7 * 5 = 35$.

3) Trouver le y manquant pour que les deux suites de nombres $(2, 6, 5)$ et $(10, y, 25)$ soient proportionnelles

La réponse à la question 3 est 30
En effet : Le terme de proportionnalité nous est donné par le premier membre de chaque suite : ainsi, les termes de la seconde suite sont cinq fois $(\dfrac{10}{2})$ les termes de la première suite. On a donc $y = 5 * 6 = 30$.

4) Trouver le réel x manquant pour que les deux suites $(1, 6, 5)$ et $(5, 20, x)$ soient en relation affine.

La réponse à la question 4 est 17
En effet : Ces deux suites sont en relation affine si

$$\frac{20 - x}{6 - 5} = \frac{20 - 5}{6 - 1} \Longleftrightarrow (20 - x) = 15/5 = 3 \Longleftrightarrow x = 17$$

5) Trouver le réel y pour que les deux suites $(1, 6, 5)$ et $(2, y, 7)$ soient en relation affine.

La réponse à la question 5 est 8,25
En effet : Ces deux suites sont en relation affine si

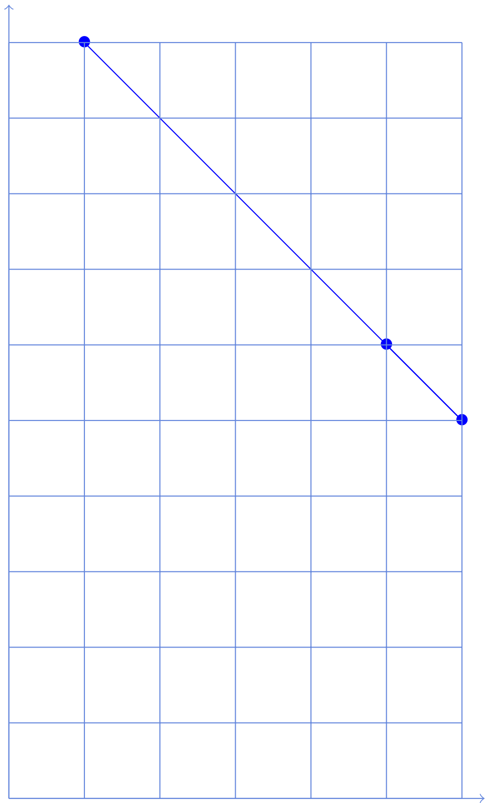
$$\frac{y - 7}{6 - 5} = \frac{7 - 2}{5 - 1} \Longleftrightarrow (y - 7) = 5/4 \Longleftrightarrow y = (28 + 5)/4 = 33/4 = 8,25$$

6) Trouver le réel z manquant pour que les deux suites $(1, 6, 5)$ et $(z, 5, 6)$ soient en relation affine.

La réponse à la question 6 est $z = 10$
En effet : Ces deux suites sont en relation affine si (1,z) (6,5) et (5,6) sont alignés.

$$\frac{5-z}{6-1} = \frac{6-5}{5-6} \Longleftrightarrow (5-z)/5 = -1 \Longleftrightarrow 5 - z = -5 \Longleftrightarrow z = 5+5 = 10$$

On le vérifie sur un graphique



7) Trouver l'intersection des droites d'équation $107x + y = 217$ et $12x - 6y = 6$	

La réponse à la question 7 est $x = 2, y = 3$
En effet : La seconde équation se simplifie en la divisant par 6. Elle devient $2x - y = 1$. Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} 107x + y &= 217 \\ 2x - y &= 1 \end{cases}$$

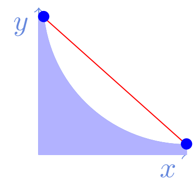
En additionnant les deux équations, on trouve $109x = 218$, soit $x = \frac{218}{109} = 2$
En remplaçant x dans la seconde équation, on trouve $y = 2x - 1 = 4 - 1 = 3$

8) Donner l'équation de la droite qui contient les trois points (1,10), (6,5) et (5,6)	

La réponse à la question 8 est $x + y = 11$
En effet : La droite qui connecte (6,5) et (5,6) est une droite de pente -1. Elle a donc pour équation $x + y = cste$. La constante est égale (ouf !) pour les trois points à 11.

9) Trouver la condition sur le paramètre $a \leq 0$, pour que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \ / \ x^a y \leq 107\}$ soit convexe	

La réponse à la question 9 est $a = 0$
En effet : Considérons la fonction $y = 107x^{-a}$, lorsque $a > 0$ cette fonction est décroissante. Sa dérivée seconde est $y_{xx} = 107 * (-a) * (-a-1)x^{-a-2} = 107a(a+1)x^{-a-2} > 0$: elle est convexe. Cela correspond au dessin suivant :

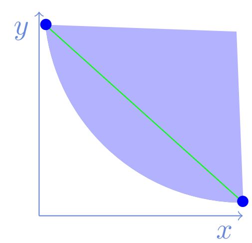


et donc l'ensemble $\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2y \leq 107\ \}$ n'est pas convexe : par exemple, le segment (représenté en rouge) qui relie deux points de la frontière, n'est pas dans l'ensemble. Par contre lorsque $a = 0$, cet ensemble est défini : c'est dans ce cas $\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\ /\ y \leq 107\ \}$ c'est en fait un demi espace, il est convexe.

10) Trouver la condition sur le paramètre $a \geq 0$, pour que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+\ /\ x^a y \geq 107\}$ soit convexe	

La réponse à la question 10 est $a \geq 0$

En effet : Considérons la fonction $y = 107x^{-a}$, lorsque $a > 0$ cette fonction est décroissante. Sa dérivée seconde est $y_{xx} = 107 * (-a) * (-a - 1)x^{-a-2} = 107a(a + 1)x^{-a-2} > 0$: elle est convexe. Cela correspond au dessin suivant :



et donc l'ensemble $\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2y \geq 107\ \}$ est convexe : par exemple, le segment (représenté en rouge) qui relie deux points de la frontière, reste dans l'ensemble. C'est aussi le cas lorsque $a = 0$, cet ensemble est défini dans ce cas comme $\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\ /\ y \geq 107\ \}$ est en fait un demi espace, il est convexe.

11) Trouver l'intersection des droites d'équation $2x + 3y = 3$ et $x + y = 1$	

La réponse à la question 11 est $x = 0$, $y = 1$

En effet :

Fin du corrigé du TD 5