Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 5

Optimisation avec contrainte (saturée), avec ou sans la méthode du Lagrangien

Automne 2021

On analyse des programmes d'optimisation de type $\max_{x,y} \; f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$. *Les savoirs à revoir pour ce TD :* —issus des précédents td— *les dérivées d'une fonction de deux variables, les conditions d'optimisation sans contrainte d'une fonction de deux variables, le caractère contraignant ou non d'une contrainte, les conditions premières dans le cas d'une contrainte saturée, et,* —spécifiques à ce TD— *la méthode du Lagrangien.*

Lorsqu'on sait la contrainte saturée, on écrit les conditions premières, ce qui conduit à trouver, avec toutes ces équations un ou plusieurs candidat potentiels du programme, ou bien à conclure que le programme diverge.	Une condition nécessaire pour avoir un maximum local d'une fonction $f(x,y)$ quand il y a la contrainte $g(x,y)=0$: condition première, dite FOC : Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ / $f_x = \lambda g_x$ et $f_y = \lambda g_y$ Au contraire, si (x,y) est une solution du programme $\max_{x,y} \; f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ qui ne sature pas la contrainte ($g(x,y) > 0$), alors, nécessairement, en ce point, les deux dérivées fx ou fy sont nulles.	Dans le cas où le programme contraint $\max_{x,y} \; f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ alors il existe $\lambda > 0$ tel que (x^*, y^*) a une solution, cette solution est aussi solution du programme non contraint $\max_{x,y} \; f(x,y) + \lambda g(x,y)$. La méthode de Lagrange propose donc de trouver la solution d'un tel programme non contraint en utilisant les méthodes d'optimisation non contraintes.. Les FOC, si $g_x \neq 0$ et si $g_y \neq 0$: $\mathcal{L}_x = 0 = \mathcal{L}_y = \lambda \mathcal{L}_\lambda$.	En pratique, la méthode de Lagrange consiste à écrire le Lagrangien, puis de calculer les deux dérivées $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$, afin de pouvoir écrire qu'elles sont nulles, ce qui conduira aux conditions premières standard. Ensuite, Il est important de noter que $\mathcal{L}_\lambda = 0$ équivaut à dire que la contrainte est saturée.

1 Résoudre un programme optimal avec une contrainte saturée et des FOC déterminantes

Pour chacun de ces problèmes, on définira les variables, les contraintes, l'objectif, on écrira le programme optimal, on supposera la contrainte saturée, et que les conditions premières décrivent l'optimum.

1) Trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et dont le produit est le plus grand possible.

Notons $x$et$y$ les variables

La contrainte de l'énoncé $x+y=10$, l'objectif

Première version du programme :

$$\max_{x,y} xy$$
$$s.c. x+y=10$$

On cherche la version du programme dans laquelle la contrainte est comme une inégalité, qui sera saturée à l'optimum. On remarque que l'objectif cherche plutôt à avoir x et y grand. Pour que la contrainte s'oppose à l'objectif, et qu'elle soit saturée, on écrira donc $x+y \leq 10$ et non $x+y \leq 10$

Le programme à résoudre est donc en version équivalente :

$$\max_{x,y} xy$$
$$s.c. x+y \leq 10$$

$f = xy$, $g = 10 - x - y$, f **est quasiconcave, la contrainte (un triangle) est convexe. La solution du programme est toute solution qui satisfait les conditions premières et la saturation de la contrainte. On calcule donc les dérivées pour avoir les conditions premières**

$$f_x = y \qquad f_y = x \qquad g_x = -1 \qquad g_y = -1 \qquad \frac{y}{-1} = \frac{x}{-1}$$

Les deux équations qui résolvent le problème sont donc

$$x = y \qquad x + y = 10$$

On trouve la solution $x = y = 5$

Soit deux nombres x **et** y**, On veut maximiser** xy **sous la contrainte** $x + y = 10$**. Sous forme d'inégalité, on écrira la contrainte** $x + y \leq 10$**, qui est bien contraignante et saturée à l'optimum. Le programme est donc** $\max_{x,y} xys.cx + y \leq 10$**. Programme dont l'objectif est quasiconcave, et la contrainte, convexe. Les conditions premières**

$$f_x = y \qquad f_y = x \qquad g_x = -1 \qquad g_y = -1 \qquad \frac{y}{-1} = \frac{x}{-1}$$

s'écrivent $x = y$ **et on obtient à la fin, étant donné la contrainte saturée** $x + y = 10$ **:** $x = y = 5$

2) Une firme de technologie $q = LK$. Quel est son coût pour produire 4 unités de bien, sachant que le prix de tous les facteurs de production sont égaux à 1 ? [Il s'agira de trouver le plan de production le moins couteux pour produire 4 biens]

Soit deux nombres L **et** K**, On veut minimiser** $L + K$ **sous la contrainte** $KL = 4$**. Sous forme d'inégalité, on écrira la contrainte** $KL \geq 4$**, qui est bien contraignante et saturée à l'optimum. Le programme est donc** $\max_{L,K} \quad -L - Ks.c. \quad LK \geq 4$**. Programme dont l'objectif est linéaire, donc, quasiconcave, et la contrainte (au dessus d'une hyperbole convexe), convexe. Les conditions premières**

$$f_L = 1 \qquad f_K = 1 \qquad g_L = K \qquad g_K = L \qquad \frac{1}{K} = \frac{1}{L}$$

s'écrivent $K = L$ **et on obtient à la fin, étant donné la contrainte saturée** $KL = 4$ **:** $K = L = 2$ **et donc** $C(4) = 4$

3) Résoudre les différents programmes suivants, en supposant que leur contrainte est saturée et que les candidats à l'optimum sont la solution du programme.

$$\begin{array}{rl} Max_{x_1,x_2} & \ln(x_1) + 3\ln(x_2) \\ s.c. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R \end{array} \qquad \begin{array}{rl} Max_{p,q} & pq - \frac{1}{4}q^2 \\ s.c. & q \leq 100 - p \end{array} \qquad \begin{array}{rl} Max_{q,c} & pq - c \\ s.c. & c \geq \frac{1}{4}q^2 \end{array}$$

il faut bien prendre soin de transformer la contrainte sous la forme $g(x,y) \geq 0$

Dans le premier cas, il faut réécrire la contrainte $R - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0$. .

Dans le deuxième cas, il faut réécrire la contrainte $100 - p - q \geq 0$.

Dans le troisième cas, il faut réécrire la contrainte $c - \frac{1}{4}q^2 \geq 0$.

Dans le premier cas, FOC et saturation de la contrainte s'écrivent

$$(1/x_1)/(3/x_2) = p_1/p_2 \tag{1}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R \tag{2}$$

ou encore

$$3p_1x_1 = p_2x_2 \tag{3}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R \tag{4}$$

ce qui conduit à la solution

$$p_1x_1 = R/4 \tag{5}$$

$$p_2x_2 = 3R/4 \tag{6}$$

Dans le second cas, FOC et saturation de la contrainte s'écrivent

$$p - \frac{1}{2}q = q \tag{7}$$

$$p + q = 100 \tag{8}$$

ou encore

$$p = \frac{3}{2}q \tag{9}$$

$$p + q = 100 \tag{10}$$

ce qui conduit à la solution

$$\frac{5}{2}q = 100 \tag{11}$$

$$p = 100 - q \tag{12}$$

et donc

$$q = 40 \tag{13}$$

$$p = 60 \tag{14}$$

Dans le troisième cas, FOC et saturation de la contrainte s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl} q & = & 2p \\ c & = & \frac{1}{4}q^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} q & = & 2p \\ c & = & p^2 \end{array}\right.$$

2 Savoir analyser si un programme est contraint ou non, s'il diverge ou non

1) Reprendre les cinq programmes précédents, et indiquer pourquoi, dans chacun des cas, on peut effectivement déduire que la contrainte est saturée.

Dans le premier cas, si on appelle x_1 et x_2 les deux nombres, on voit bien que dès que l'on peut augmenter x_1 ou x_2, le produit augmente. Aussi la contrainte $x_1 + x_2 \leq 10$ est saturée

Dans le secnod cas cas, la contrainte est $LK \geq 4$. On voit bien que dès que l'on peut diminuer L ou L, le coût diminue et le profit augmente. Aussi la contrainte est saturée

Dans le troisième cas, la contrainte $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ est saturée, sinon, si la solution est à l'intérieur du triangle d'équation $p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$, on peut par exemple augmenter x_1 un peu et augmenter ainsi l'utilité sous l'hypothèse que $U_1 > 0$. Ce qui montre par l'absurde que la contrainte est saturée.

Dans le quatirème cas, la contrainte $p \leq 100 - q$ est saturée, sinon, une fois q choisi, on pourrait augmenter légèrement le prix, ce qui aurait pour effet immédiat d'augmenter le profit du monopole. ou du moins l'expression $pq - (1/4)q^2$.

Dans le cinquième cas, la contrainte $c \geq \frac{1}{4}q^2$ est saturée, sinon, on pourrait diminuer c et augmenter le terme $pq - c$ (qui n'est autre que le profit d'une firme).

2) Dire dans deux cas suivants si les programmes ont ou non les mêmes solutions. (on parlera alors de programmes équivalents.)

$$\begin{array}{ll} Max_{x_1,x_2>0} & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\ s.c. & x_1x_2 \geq 1 \end{array} \quad \boxed{\text{et}} \quad \begin{array}{ll} Max_{x_1,x_2>0} & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\ s.c. & x_1x_2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q \geq 100 - p \end{array} \quad \boxed{\text{et}} \quad \begin{array}{ll} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q = 100 - p \end{array}$$

Dans les deux questions, il s'agit de regarder le programme avec inégalité, et déterminer, comme dans le cas précédent si sa contrainte est saturée à l'optimum. Si la contrainte du programme avec inégalité est saturée, le programme avec inégalité pourrait être équivalent au programme avec égalité ... (ATTENTION) à la condition que la solution existe. L'écueil ici est de bien vérifier que le programme écrit avec une inégalité a bien une solution. Et s'il n'en a pas, il faut y regarder de plus près.

Les programmes

$$\begin{array}{rl} Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} \\ s.c. & x_1x_2 \geq 1 \end{array} \quad \textbf{ET} \quad \begin{array}{rl} Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} \\ s.c. & x_1x_2 = 1 \end{array}$$

sont-ils équivalents ? Cette question revient exactement à savoir si dans le programme avec inégalité, la contrainte est saturée à l'optimum.

Or dans le programme avec inégalité, si $x_1x_2 > 1$, on pourrait diminuer de façon infinitésimale x_1 ou x_2 de manière à ce que la contrainte soit encore satisfaite. Chacune de ces opérations conduirait à ce que l'objectif $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ grandisse, ce qui contredirait que l'on soit à l'optimum. Donc si le programme contraint a une solution, cette solution satisfait la contrainte

Pour conclure à l'équivalence des programme, il reste encore à étuder si l'un ou l'autre des programme écrit avec une contrainte sous forme d'inégalité ne diverge pas.

OR ICI, les deux programmes divergent !

En effet, quand on considère la contrainte $x_1x_2 = 1$, on peut choisir x_1 très petit, aussi petit que l'on veut : par exemple $x_1 = 1/n$ (et $x_2 = n$) et du coup l'objectif sera d'autant plus grand, supérieur dans mon exemple à $n + 1/n = n$. Donc, avec cette contrainte, l'objectif peut être aussi grand que l'on veut. Le/les programmes divergent.

En conclusion : les deux programmes sont équivalents !

Les programmes

$$\begin{array}{rl} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q \geq 100-p \end{array} \quad \boxed{\textbf{et aussi}} \quad \begin{array}{rl} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q = 100-p \end{array}$$

sont-ils équivalents ? Cette question revient exactement à savoir si dans le programme avec inégalité, la contrainte est saturée à l'optimum.

Or, en tout point (q, p) tel que $q > 100 - p$, si on augmente q, de façon infinitésimale, ou même de façon brutale, la contrainte reste encore satisfaite, et on augmenterait l'objectif (sous bien sûr la considération qu'à l'optimum, on devrait avoir $p > c$, car on peut, dans ce programme obtenir plus que zéro ou tout nombre négatif). Ceci doit vous mettre la puce à l'oreille. La contrainte $q > 100 - p$ n'en est pas vraiment une dans ce problème : on peut choisir q très grand. Et justement, quand q est très grand, l'objectif sera lui aussi très grand. On doit en conclure que le programme

$$\begin{array}{rl} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q \geq 100-p \end{array}$$

diverge.

Pour conclure que les deux programmes - contrainte écrite comme égalité - contrainte écrite comme inégalité sont non équivalents, il faut étudier le programme - contrainte écrite comme égalité, et montrer qu'il ne diverge pas. Or, donné que q et p sont des nombres positifs ou nuls, la contrainte $p + q \leq 100$, délimite un triangle, borné. La fonction objectif, définie et calculée en tous les points de ce triangle ne peut diverger.

3) Résoudre ces programmes, quand ils ne divergent pas.

Il n'y a que le dernier programme qui ne diverge pas, on peut l'écrire $\max_{p,q} q(p-c)$ $s.c.$ $q \leq 100-q$. On a $f = q(p-c)$

et $g = 100 - p - q$. On en déduit les les dérivées et les conditions premières suivantes :

$$f_p = q \quad f_q = p - c \quad g_p = -1 \quad g_q = -1 \quad \frac{q}{-1} = \frac{p-c}{-1}$$

Les deux équations à résoudre pour atteindre la solution sont alors

$$\begin{cases} q &= p - c \\ p + q &= 100 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q &= \frac{100-c}{2} \\ p &= \frac{100+c}{2} \end{cases}$$

3 Lagrangien

1) Ecrire le Lagrangien pour les différents programmes suivants. Puis résoudre ces programmes, ou du moins, donner les conditions que doivent satisfaire les solutions. Combiner ces conditions avec la contrainte quand elle est saturée.

$$\begin{array}{llllll} Max_{x_1,x_2} & \ln x_1 + 3\ln x_2 & Max_{p,q} & pq - \frac{1}{4}q^2 & Max_{q,c} & pq - c \\ s.c. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R & s.c. & q \leq 100 - p & s.c. & c \geq \frac{1}{4}q^2 \end{array}$$

Pour ecrire le Lagrangien, il faut bien prendre soin de transformer la contrainte sous la forme $g(x,y) \geq 0$ et alors le Lagrangien est $\mathcal{L} = f + \lambda g$.
Dans le premier cas, il faut réécrire la contrainte $R - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0$. Le Lagrangien est alors $\mathcal{L} = U(x_1,x_2) + \lambda\left(R - p_1x_1 - p_2x_2\right)$.
Dans le deuxième cas, il faut réécrire la contrainte $100-p-q \geq 0$. Le Lagrangien est alors $\mathcal{L} = pq - \frac{1}{4}q^2 + \lambda\left(100 - p - q\right)$.
Dans le troisième cas, il faut réécrire la contrainte $c - \frac{1}{4}q^2 \geq 0$. Le Lagrangien est alors $\mathcal{L} = pq - c + \lambda\left(c - \frac{1}{4}q^2\right)$.

Ensuite, il faut pour chacun des cas déterminer si la contrainte est ou non saturée. Ce qui est le plus difficile, puis ensuite, écrire les conditions premières en dérivant le Lagrangien par rapport aux variables que l'on recherche.

Dans le premier cas, la contrainte $p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$ est saturée, sinon, on peut par exemple augmenter x_1 un peu et augmenter ainsi l'utilité. On dérive le Lagrangien par rapport à x_1 et par rapport à x_2. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = U(x_1,x_2) + \lambda\left(R - p_1x_1 - p_2x_2\right)$, ses dérivées $\mathcal{L}_1 = U_1\lambda(-p_1)$ et $\mathcal{L}_2 = U_2\lambda(-p_2)$. Les conditions premières s'écrivent donc

$$U_1 = \lambda p_1 \qquad U_2 = \lambda p_2$$

ce qui conduit à la célèbre condition

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

cad qu'un point singulier est tel que le TMS de bien 1 en bien 2 égale le prix relatif de bien 1 en bien 2. À ce stade là, on ne peut pas aller plus loin, si ce n'est dans des applications numériques où on peut évaluer le TMS $\frac{U_1}{U_2}$ en fonction de x_1 et x_2.

Dans le second cas, la contrainte $p \leq 100 - q$ est saturée, sinon, une fois q choisi, on pourrait augmenter légèrement le prix, ce qui aurait pour effet d'augmenter le profit du monopole . On dérive le Lagrangien par rapport à p et par rapport à q. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = pq - \frac{1}{4}q^2 + \lambda\left(100 - p - q\right)$, ses dérivées $\mathcal{L}_p = q + \lambda * (-1) = q - \lambda$ et $\mathcal{L}_q = p - \frac{1}{4} * 2q + \lambda * (-1)$. Les conditions premières s'écrivent donc

$$q = \lambda \qquad -\lambda = \frac{1}{2} * q - p$$

ce qui conduit à la condition

$$\frac{p - \frac{1}{2} * q}{q} = 1$$

Que l'on réécrit généralement

$$\frac{p-\frac{1}{2}*q}{p}=\frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Interprétation : le problème est celui du monopole, qui veut augmenter (ses prix et) ses profits, mais qui est contraint par une demande qui réagit à ses augmentations de prix. Le coût de ce monopole est $\frac{1}{4}q^2$, et donc on reconnaît le coût marginal dans Le terme de gauche, qui s'écrit $\frac{p-C_m}{p}$. Dans le terme de droite, on a une quantité qui dépend de la demande du marché. La demande étant $q=100-p$, on reconnaît l'élasticité par rapport au prix qui est, dans cet exemple précis $\varepsilon=\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}=-\frac{p}{q}$ Les conditions premières de ce programme s'écrivent donc

$$\frac{p-C_m}{p}=\frac{1}{-\varepsilon}$$

Si l'élasticité est très grande, le monopole pourra peu augmenter ses prix, Si l'élasticité est petite, le monopole pourra sensiblement augmenter ses prix.

Dans le troisième cas, la contrainte $c\leq\frac{1}{4}q^2$ est saturée, sinon, on pourrait diminuer c et augmenter le terme $pq-c$ qui n'est autre que le profit d'une firme. On dérive le Lagrangien par rapport à q et à c. Le problème est en effet écrit en fonction de ces deux variables. Le Lagrangien est $\mathcal{L}=pq-c+\lambda\left(c-\frac{1}{4}q^2\right)$, ses dérivées, $\mathcal{L}_q=p-\lambda\frac{1}{2}q$ et $\mathcal{L}_c=-1+\lambda$. Les conditions premières sont alors

$$\lambda\frac{1}{2}q=p \qquad \lambda=1$$

ce qui conduit à la condition

$$\frac{1}{2}q=p$$

connue plus classiquement sous la forme : coût marginal = prix.
La résolution des deux équations, celle donnée par les dérivées du lagrangien, et celle de la contrainte saturée sont effectuées ci-après
Dans le premier cas, FOC et saturation de la contrainte s'écrivent

$$(1/x_1)/(3/x_2)=p_1/p_2 \tag{15}$$
$$p_1x_1+p_2x_2=R \tag{16}$$

ou encore

$$3p_1x_1=p_2x_2 \tag{17}$$
$$p_1x_1+p_2x_2=R \tag{18}$$

ce qui conduit à la solution

$$p_1x_1=R/4 \tag{19}$$
$$p_2x_2=3R/4 \tag{20}$$

Dans le second cas, FOC et saturation de la contrainte s'écrivent

$$p-\frac{1}{2}q=q \tag{21}$$
$$p+q=100 \tag{22}$$

ou encore

$$p=\frac{3}{2}q \tag{23}$$
$$p+q=100 \tag{24}$$

ce qui conduit à la solution

$$\frac{5}{2}q = 100 \tag{25}$$
$$p = 100 - q \tag{26}$$

et donc

$$q = 40 \tag{27}$$
$$p = 60 \tag{28}$$

Dans le troisième cas, FOC et saturation de la contrainte s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl} q & = & 2p \\ c & = & \frac{1}{4}q^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} q & = & 2p \\ c & = & p^2 \end{array}\right.$$

Fin du corrigé du TD 5