Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 5 - groupe 127

Optimisation avec contrainte (saturée), avec ou sans la méthode du Lagrangien

Automne 2021

On analyse des programmes d'optimisation de type $\max_{x,y} \ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$. *Les savoirs à revoir pour ce TD :* —issus des précédents td— *les dérivées d'une fonction de deux variables, les conditions d'optimisation sans contrainte d'une fonction de deux variables, le caractère contraignant ou non d'une contrainte, les conditions premières dans le cas d'une contrainte saturée, et,* —spécifiques à ce TD— *la méthode du Lagrangien.*

Lorsqu'on sait la contrainte saturée, on écrit les conditions premières, ce qui conduit à trouver, avec toutes ces équations un ou plusieurs candidat potentiels du programme, ou bien à conclure que le programme diverge.	Une condition nécessaire pour avoir un maximum local d'une fonction $f(x,y)$ quand il y a la contrainte $g(x,y)=0$: condition première, dite FOC : Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ / $f_x = \lambda g_x$ et $f_y = \lambda g_y$ Au contraire, si (x,y) est une solution du programme $\max_{x,y} \ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ qui ne sature pas la contrainte ($g(x,y) > 0$), alors, nécessairement, en ce point, les deux dérivées fx ou fy sont nulles.	Dans le cas où le programme contraint $\max_{x,y} \ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ alors il existe $\lambda > 0$ tel que (x^*, y^*) a une solution, cette solution est aussi solution du programme non contraint $\max_{x,y} \ f(x,y) + \lambda g(x,y)$. La méthode de Lagrange propose donc de trouver la solution d'un tel programme non contraint en utilisant les méthodes d'optimisation non contraintes.. Les FOC, si $g_x \neq 0$ et si $g_y \neq 0$: $\mathcal{L}_x = 0 = \mathcal{L}_y = \lambda \mathcal{L}_\lambda$.	En pratique, la méthode de Lagrange consiste à écrire le Lagrangien, puis de calculer les deux dérivées $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$, afin de pouvoir écrire qu'elles sont nulles, ce qui conduira aux conditions premières standard. Ensuite, Il est important de noter que $\mathcal{L}_\lambda = 0$ équivaut à dire que la contrainte est saturée.

1 Résoudre un programme optimal avec une contrainte saturée et des FOC déterminantes

Pour chacun de ces problèmes, on définira les variables, les contraintes, l'objectif, on écrira le programme optimal, on supposera la contrainte saturée, et que les conditions premières décrivent l'optimum.

1) Trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et dont le produit est le plus grand possible.

2) Une firme de technologie $q = LK$. Quel est son coût pour produire 4 unités de bien, sachant que le prix de tous les facteurs de production sont égaux à 1 ? [Il s'agira de trouver le plan de production le moins couteux pour produire 4 biens]

3) Résoudre les différents programmes suivants, en supposant que leur contrainte est saturée et que les candidats à l'optimum sont la solution du programme.

$$\begin{array}{rlcrlcrl} Max_{x_1,x_2} & \ln(x_1) + 3\ln(x_2) & & Max_{p,q} & pq - \frac{1}{4}q^2 & & Max_{q,c} & pq - c \\ s.c. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R & & s.c. & q \leq 100 - p & & s.c. & c \geq \frac{1}{4}q^2 \end{array}$$

2 Savoir analyser si un programme est contraint ou non, s'il diverge ou non

1) Reprendre les cinq programmes précédents, et indiquer pourquoi, dans chacun des cas, on peut effectivement déduire que la contrainte est saturée.

2) Dire dans deux cas suivants si les programmes ont ou non les mêmes solutions. (on parlera alors de programmes équivalents.)

$$\begin{array}{rlcrl} Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} & \boxed{\text{et}} & Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} \\ s.c. & x_1x_2 \geq 1 & & s.c. & x_1x_2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcrl} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) & \boxed{\text{et}} & Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q \geq 100 - p & & s.c. & q = 100 - p \end{array}$$

3) Résoudre ces programmes, quand ils ne divergent pas.

3 Lagrangien

1) Ecrire le Lagrangien pour les différents programmes suivants. Puis résoudre ces programmes, ou du moins, donner les conditions que doivent satisfaire les solutions. Combiner ces conditions avec la contrainte quand elle est saturée.

$$\begin{array}{rlcrlcrl} Max_{x_1,x_2} & \ln x_1 + 3\ln x_2 & & Max_{p,q} & pq - \frac{1}{4}q^2 & & Max_{q,c} & pq - c \\ s.c. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R & & s.c. & q \leq 100 - p & & s.c. & c \geq \frac{1}{4}q^2 \end{array}$$

FIN du sujet du TD n° 5 - groupe 127