

Les savoirs pour ce TD : les dérivées d'une fonction d'une ou plusieurs variables, les dérivées de premier ou de second ordre (dites aussi dérivées premières et dérivées secondes), la traduction en termes de dérivées de fonction croissante ou décroissante et de fonction convexe ou concave.

<p>On note f' la dérivée d'une fonction f. Cette fonction dérivée sert habituellement à quantifier les variations de la fonction f.</p> <p><u>À connaître</u> : les dérivées des fonctions usuelles</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. une fonction constante a une dérivée nulle 2. une fonction linéaire, $f = \alpha x$ a une dérivée constante $f' = \alpha$ 3. une fonction puissance $f = x^a$ a pour dérivée $f' = ax^{a-1}$ 4. une fonction log $f = \ln(x)$ a pour dérivée $f' = 1/x$ 5. la fonction exp $f = e^x$ a pour dérivée $f' = e^x$ 	<p><u>À savoir sans sourciller</u> :</p> <p>Lorsque la dérivée d'une fonction est positive, la fonction est croissante Lorsque la dérivée d'une fonction est négative, la fonction est décroissante Lorsque la dérivée seconde d'une fonction est positive, la fonction est convexe Lorsque la dérivée seconde d'une fonction est négative, la fonction est concave.</p>	<p>Par ailleurs, les règles de dérivation usuelles sur les opérations de fonction doivent être connues</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $(f + g)' = f' + g'$ 2. $(fg)' = f'g + fg'$ 3. $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ 4. $(f(g))' = f'(g) * g'$
<p>Les dérivations pour les fonctions de deux variables s'opèrent quasi-identiquement : Il faut repérer dans la fonction de deux variables la variable à partir de laquelle on veut dériver la fonction, puis, on dérive cette fonction comme si c'était une fonction de une variable. On notera f_x la dérivée de f par rapport à la variable x et f_y la dérivée de f par rapport à la variable y.</p>		

1 Dérivées d'une fonction de une variable

1) Calculer les dérivées des fonctions de une variable suivantes

$$f = \ln(1 + x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

2) Calculer les dérivées de fonctions de fonctions suivantes, après avoir écrit deux lignes pour expliquer comment on dérive $f \circ g$.

$$f = (1 + 2x - x^2)^3 \quad g = (\sqrt{x+1})^2 \quad h = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x}} \quad s = e^{1-x^2}$$

3) Calculer la dérivée seconde de la fonction $h(x) = f(g(x))$, sachant que les deux fonctions f et g sont dérivables.

2 Dérivées d'une fonction de deux variables

1) Calculer les dérivées des fonctions de deux variables suivantes par rapport à x et par rapport à y

$$f = x^2 + y - 1 \quad g = xy - 1 \quad h = x + yx - 1 \quad s = (x - 1)(y + 1) - 3$$

2) Calculer les dérivées secondes des fonctions de deux variables suivantes par rapport à x et par rapport à y ainsi que la dérivée croisée. Pour cette dernière on fera tour à tour les deux méthodes, dériver d'abord par rapport à x puis par rapport à y , puis d'abord par rapport à y puis par rapport à x . Vous observerez que vous arrivez au même résultat.

3 Résoudre astucieusement une équation

On cherche à résoudre l'équation $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6 = 0$

3) Montrer que $y = 6$ est solution de l'équation $y^2 - 11y + 30 = 0$, puis réécrire cette équation sous la forme d'un produit, et en trouver toutes ses solutions.

4) Après avoir écrit l'équation sous la forme $(x - 1)(x + 3)(x - 2)(x + 4) = -6$, on trouvera l'ensemble de ses solutions

5) Pouvait-on prédire que l'équation $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6 = 0$ aurait 4 solutions ?

6) La fonction $f = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$ a-t'elle des limites à l'infini ?

7) La fonction $f = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$ est-elle concave ou convexe ?

4 Relation affine cachée

1) Une variable économique K vérifie l'équation $K = (Q_1 + 3Q_2)^3 \times L^{-1/5}$ où L , Q_1 et Q_2 sont des réels strictement positifs. Montrer que la variable Q_2 est une fonction affine de la variable Q_1 , que l'on déterminera à l'aide des paramètres K et L .

2) Les variables K et L sont liés par la condition $L(K + 1) = 12$, doit on en déduire que les variables L et K sont

- proportionnelles ;
- inversement proportionnelles ;
- telles que L est une fonction affine de K ;
- telles que $K + 1$ est une fonction affine de L .

5 Dérivation des variables définies implicitement par une équation

Considérez les deux variables p et q qui sont liées par l'équation $p \ln(q) - q \ln(p) = 0$, sous la condition $p \neq q$.

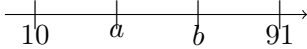
1) Tracer dans la premier temps la fonction $f(p) = \ln(p)/p$ dans un espace p , f

2) En déduire que les variables p et q liés par l'équation $p \ln(q) - q \ln(p) = 0$, sous la condition $p \neq q$ sont corrélées négativement.

3) (*) En considérant l'équation $p \ln(q) - q \ln(p) = 0$, sous la condition $q \neq p$, qui définit implicitement q en fonction de p , et en faisant l'hypothèse que la relation $q(p)$ est dérivable, trouver le résultat précédent de corrélation en dérivant l'équation $p \ln(q) - q \ln(p) = 0$ par rapport à p . On notera $q'(p)$ la variation de la variable q par rapport à p .

6 Un morceau d'annale

Pour chacune des questions suivantes, vous indiquerez dans la case à droite de la question la réponse.

1) Trouver a et b entre 10 et 90 tels que $10 \leq a \leq b \leq 91$ soient équidistants 	
2) Trouver le x pour que les deux suites de nombres $(1, 2, 5)$ et $(7, 14, x)$ soient en relation affine	
3) Trouver le y manquant pour que les deux suites de nombres $(2, 6, 5)$ et $(10, y, 25)$ soient proportionnelles	
4) Trouver le réel x manquant pour que les deux suites $(1, 6, 5)$ et $(5, 20, x)$ soient en relation affine.	
5) Trouver le réel y pour que les deux suites $(1, 6, 5)$ et $(2, y, 7)$ soient en relation affine.	
6) Trouver le réel z manquant pour que les deux suites $(1, 6, 5)$ et $(z, 5, 6)$ soient en relation affine.	
7) Trouver l'intersection des droites d'équation $107x + y = 217$ et $12x - 6y = 6$	
8) Donner l'équation de la droite qui contient les trois points $(1,10)$, $(6,5)$ et $(5,6)$	
9) Trouver la condition sur le paramètre $a \leq 0$, pour que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x^a y \leq 107\}$ soit convexe	
10) Trouver la condition sur le paramètre $a \geq 0$, pour que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x^a y \geq 107\}$ soit convexe	
11) Trouver l'intersection des droites d'équation $2x + 3y = 3$ et $x + y = 1$	

FIN du sujet du TD n° 5 - groupe 127