Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Corrigé du TD n° 6

Dérivées, dérivées partielles, limites, fonctions concaves et/ou quasi-concaves

Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : la définition d'un ensemble convexe dans le plan, la caractérisation d'une fonction à une variable concave et d'une fonction à deux variables quasi-concave, la manipulation des équations, les généralités sur le calcul des limites, en particulier les indéterminations et leur résolution.

<table>
<tr>
<td>Un ensemble est convexe s'il contient tout segment liant n'importe lequel de deux de ses éléments. Autrement dit $X, Y \in E$ implique $\lambda X + (1-\lambda)Y \in E$.</td>
<td>Une fonction f concave ($f'' \leq 0$) vérifie les deux propriétés suivantes : - f est en dessous de chacune de ses tangentes - f est au-dessus de chacune de ses cordes : $\forall x, y$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $\lambda \in [0,1]$</td>
<td>
<table>
<tr><td>$(+\infty) + (+\infty)$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) - (+\infty)$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) * (+\infty)$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) * (-\infty)$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\lambda * (+\infty), \lambda > 0$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\lambda * (+\infty), \lambda < 0$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$0^+ * (+\infty), \lambda > 0$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)/(+\infty)$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)/(0^-)$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
</table>
</td>
<td>Soit une fonction $f(x, y)$ définie sur un ensemble ouvert. On dit qu'elle est QUASI-CONCAVE si pour tout paramètre a, l'ensemble $\{g(x, y) \geq a\}$, cad l'ensemble des points (x, y) tel que l'image par la fonction g est supérieur à un seuil déterminé (noté a), est CONVEXE. Dans le cas particulier où $f_x > 0$ et où $f_y > 0$, la fonction est quasi-concave si ses courbes de niveau sont convexes, cad que le TMS f_x/f_y décroit le long d'une courbe de niveau.</td>
</tr>
</table>

1 Dérivées, dérivées partielles et courbes de niveau, quasi-concavité

Ceci est juste un exercice de calcul, pour vous entrainer à calculer des dérivées standard et des dérivées partielles.

1) Pour chacune des fonctions de 2 variables suivantes calculer les dérivées premières, secondes et croisée.

$$g(x, y) = x^2 y^3 \qquad g(y) = \sqrt{y} \qquad g(x, y) = x\sqrt{y} \qquad g(x, y) = x^{1/2} y^{1/3} \qquad g(x, y) = \sqrt{xy} \qquad g(x, y) = x^{1/2} y^{1/2}$$

g	g_x	g_y	g_{xx}	g_{yy}	g_{xy}
$g(x, y) = x^2 y^3$	$g_x = 2xy^2$	$g_y = 3x^2 y^2$	$g_{xx} = 2y^2$	$g_{yy} = 6x^2 y$	$g_{xy} = 4xy$
$g(x, y) = \sqrt{y}$	$g_x = 0$	$g_y = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$	$g_{xx} = 0$	$g_{yy} = -\frac{1}{4} y^{-\frac{3}{2}}$	$g_{xy} = 0$
$g(x, y) = x\sqrt{y}$	$g_x = \sqrt{y}$	$g_y = \frac{1}{2} x y^{-\frac{1}{2}}$	$g_{xx} = 0$	$g_{yy} = -\frac{1}{4} x y^{-\frac{3}{2}}$	$g_{xy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$
$g(x, y) = x^{1/2} y^{1/3}$	$g_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}$	$g_y = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}}$	$g_{xx} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{3}}$	$g_{yy} = -\frac{2}{9} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}}$	$g_{xy} = \frac{1}{6} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{3}}$
$g(x, y) = \sqrt{xy}$	$g_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$	$g_y = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$	$g_{xx} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}}$	$g_{yy} = -\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}$	$g_{xy} = \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$

2) Pour chacune des fonctions précédentes, dire si les courbes de niveau d'équation $g(x, y) = \alpha$ sont toujours décroissantes, toujours croissantes, parfois croissantes et décroissantes.

Une manière simple de faire est de calculer le rapport des dérivées marginales. Si ce rapport est positif, alors les courbes de niveau sont décroissantes. Si le rapport est négatif, alors les courbes de niveau sont croissantes. On

s'appuie sur les calculs précédents

g	g_x	g_y	TMS	**Conclusion**
$g(x,y) = x^2y^3$	$g_x = 2xy^2$	$g_y = 3x^2y^2$	$TMS = 2y/3x > 0$	**toutes les courbes de niveau sont décroissantes**
$g(x,y) = \sqrt{y}$	$g_x = 0$	$g_y = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$	$TMS = 0$	**toutes les courbes de niveau sont horizontales**
$g(x,y) = x\sqrt{y}$	$g_x = \sqrt{y}$	$g_y = \frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}}$	$TMS = 2y/x > 0$	**toutes les courbes de niveau sont décroissantes**
$g(x,y) = x^{1/2}y^{1/3}$	$g_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$	$g_y = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$	$TMS = 3y/2x > 0$	**toutes les courbes de niveau sont décroissantes**
$g(x,y) = \sqrt{xy}$	$g_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$	$g_y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$	$TMS = y/x > 0$	**toutes les courbes de niveau sont décroissantes**

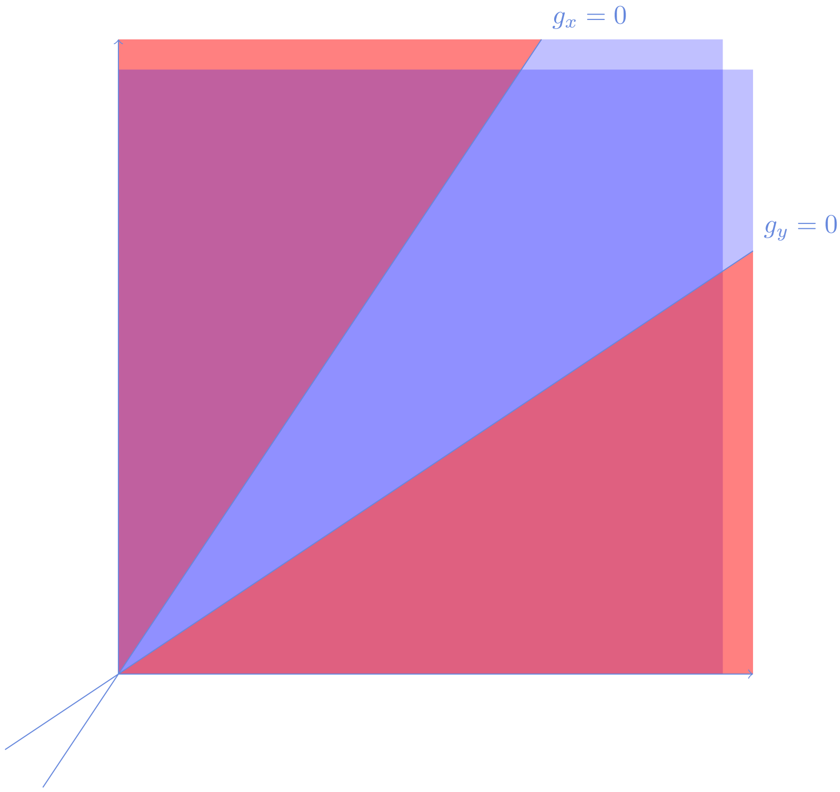
3) soit la fonction $g(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ dire si les courbes de niveau, quand on considère cette fonction uniquement pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont croissantes ou décroissantes.

Si on applique la méthodologie précédente :

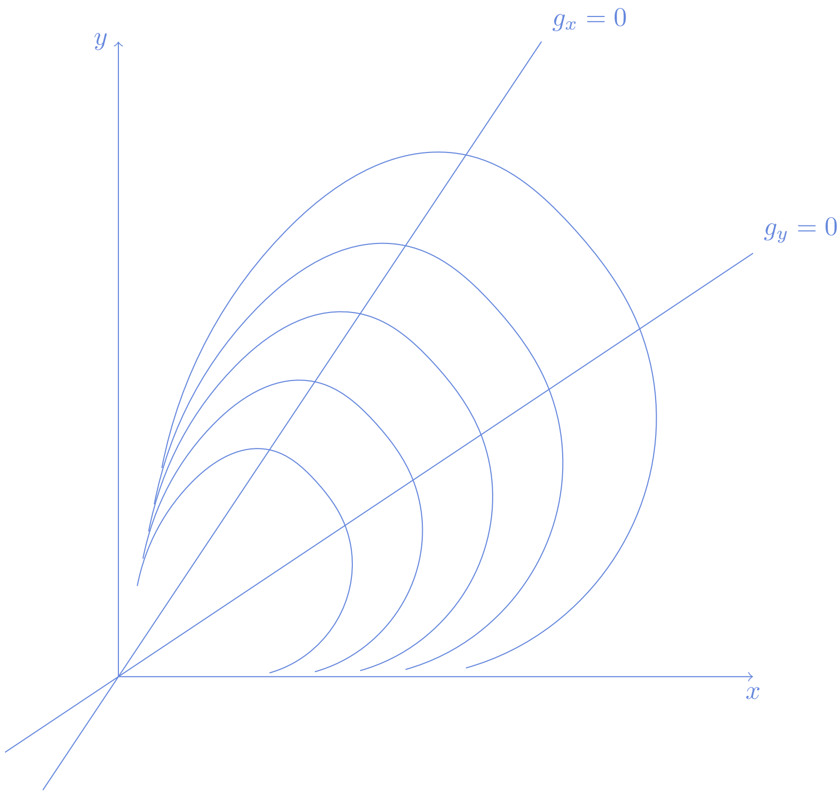
g	g_x	g_y	TMS	**Conclusion**
$g(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$	$g_x = 2x - 3y$	$g_y = -3x + 2y$	$TMS = (2x - 3y)/(-3x + 2y)$	**Il n'y a pas de réponse immédiate, il faut étudier un peu plus. Une analyse graphique où l'on représente la droite $g_x = 0$ d'équation $y = \frac{2}{3}x$ et la droite $g_y = 0$ d'équation $y = \frac{3}{2}x$ va nous aider à analyser plus attentivement la question.**

On représente donc dans un espace à deux dimensions les deux équations $g_x = 0$ et $g_y = 0$. On rappelle que $g_x = 2x - 3y$, qui est d'autant plus petit que y est grand. La droite $g_x = 0$ sépare deux secteurs du plan, le secteur haut (en rouge) ou $g_x < 0$ et le secteur bas (en bleu) ou $g_x > 0$. Par ailleurs, $g_y = -3x + 2y$, qui est d'autant plus grand que y est grand. La droite $g_y = 0$ sépare deux secteurs du plan, le secteur haut (en bleu) ou $g_y > 0$ et le

secteur bas (en rouge) ou $g_y < 0$.



Il en ressort que dans le secteur intermédiaire (bleu sur bleu) le TMS est positif, et que les courbes de niveau sur cette zone sont décroissante, et que partout ailleurs, la courbe d'indifférence est croissante. le champ de courbes d'indifférence est comme suit : elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes !



4) Reprenez les fonctions de la question 1 et étudier si elles sont ou non quasi-concaves. [définition dans le résumé.]

Pour toutes les fonctions considérées, les dérivées partielles sont toutes positives, les courbes de niveau sont donc décroissantes, on peut étudier le critère indiquant que le long d'une courbe de niveau, la TMS g_x/g_y décroit.

Fonction	Quasi-concave	Remarques
$g(x,y) = x^2y^3$	**OUI**	***Pour la quasiconcavité***, **$TMS = 2y/3x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x \uparrow$ et $y \downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**
$g(y) = \sqrt{y}$	**Sans objet**	**La quasi-concavité est une notion utilisée pour les fonctions de plus d'une variable.**
$g(x,y) = x\sqrt{y}$	**OUI**	***Pour la quasiconcavité***, **$TMS = 2y/x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x \uparrow$ et $y \downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**
$g(x,y) = x^{1/2}y^{1/3}$	**OUI**	***Pour la quasiconcavité***, **$TMS = 3y/2x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x \uparrow$ et $y \downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**
$g(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$	**OUI**	***Pour la quasiconcavité***, **$TMS = 2y/3x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x \uparrow$ et $y \downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**

2 Corrélations, dérivées et dérivées partielles

1) Soit deux variables x et y qui sont corrélées, et plus précisément liées par une relation du type $f(x, y) = 0$. *On supposera qu'on s'intéresse au cas où x et y sont tous nes deux des nombres positifs ou nuls.* Dire, dans les applications ci-après s'il y a une corrélation positive ou négative entre x et y. Utiliser des arguments simples et intuitifs. En déduire la croissance ou la décroissante de la de l'équation représentée dans un espace x, y.

$$x^2 + y - 1 = 0 \qquad xy - 1 = 0 \qquad x + yx - 1 = 0 \qquad (x-1)(y+1) - 3 = 0$$

On supposera dans le dernier cas que $x \geq 1$.

dans le premier cas pour que l'équation demeure vraie quand y augmente, il faut que x^2 diminue, cad que x diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $x^2 + y - 1 = 0$ est donc décroissante dans un espace x, y.
dans le second cas pour que l'équation demeure vraie, il faut que xy soit constante. Ainsi, quand y augmente, il faut que x diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $xy - 1 = 0$ est donc décroissante dans un espace x, y.
dans le troisième cas que l'on peut écrire $x(1 + y) - 1 = 0$, pour que l'équation demeure vraie il faut que $x(1 + y)$ demeure constante. Aussi, quand x augmente, il faut que $1 + y$ diminue, cad que y diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $x + yx - 1 = 0$ est donc décroissante dans un espace x, y.
dans le quatrième cas pour que l'équation demeure vraie il faut que $(x - 1)(1 + y)$ demeure constante. pour que l'équation demeure vraie quand y augmente, il faut que $x - 1$ diminue, cad que x diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $(x - 1)(y + 1) - 3$ est donc décroissante dans un espace x, y.

2) On considère les 4 fonctions suivantes de x et y ; pour ces 4 fonctions, calculer leurs *dérivées partielles* par rapport à x et y, et vérifier qu'elles ont bien le même signe. Auriez-vous pu, sans les calculer, trouver que ces dérivées partielles ont le même signe, dans chacun des cas ?

$$f = x^2 + y - 1 \qquad g = xy - 1 \qquad u = x + yx - 1 \qquad v = (x-1)(y+1) - 3$$

On a des fonctions qui ont été «construites» à partir des équations précédentees. Les dérivées sont standards, pas de difficulté particulière. Le fait qu'elles ont le même signe, entraine que les variables sont corélées positivement.

Les raisonnements intuitifs ont plus ou moins implicitement été fait par la compréhension du signe des dérivées partielles.

dans le premier cas,

$$f_x = 2x \geq 0 \qquad f_y = 1 \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

dans le second cas,

$$g_x = y \geq 0 \qquad g_y = x \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

dans le troisième cas,

$$u_x = 1 + y \geq 0 \qquad u_y = x \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

dans le quatrième cas,

$$v_x = y + 1 \geq 0 \qquad v_y = x - 1 \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

3) La fonction de coût d'une firme est $C(q) = 3q^2 + q + 1$. Quelle est la dérivée de la fonction de coût autour de q ? Peut-on dire que les couts marginaux sont croissants ? Peut-on dire que le coût unitaire est toujours plus élevé que 1 ?

$C'(q) = 6q + 1$.

$C''(q) = 6$. **La dérivée des coûts marginaux est croissante, le coût marginal est donc croissant. On aurait pu arriver à cette conclusion plus rapidement, en regardant d'un peu plus près l'edxpression du coût marginal :** $C'(q) = 6q + 1$.**En effet, cette fonction est croissante avec** q

Enfin, $C'(q) = 6q + 1 \geq 1$ **:le coût marginal est toujours supérieur à 1. Produire une unité coûte toujours plus que 1 dans cet exemple.**

4) Donner un exemple de fonction de coût dont le coût marginal est positif et croissant, mais toujours compris entre 0 et 1

Première étape On essaye par tâtonnement

Par exemple $C(q) = \frac{q}{q+1}$**, cette fonction est comprise entre 0 et 1, on doit calculer ses deux dérivées pour vérifier que le coût marginal est positif et croissant. Pour ce faire, on réécrit la fonction** C **sous la forme** $C(q) = \frac{q+1-1}{q+1} = 1 - \frac{1}{q+1}$.

Il vient aisément : $C'(q) = -(-\frac{1}{(q+1)^2}) = \frac{1}{(q+1)^2} \geq 0$ **MAIS : ici, lecoût marginal n'est pas croissant.**

Si on Réessaye, on aura pas plus de chance

Prenons en espérant l'essai plus heureux, par exemple $C(q) = 1 - e^{(-q)}$**, cette fonction est comprise entre 0 et 1, on doit calculer ses deux dérivées pour vérifier que le coût marginal est positif et croissant.**

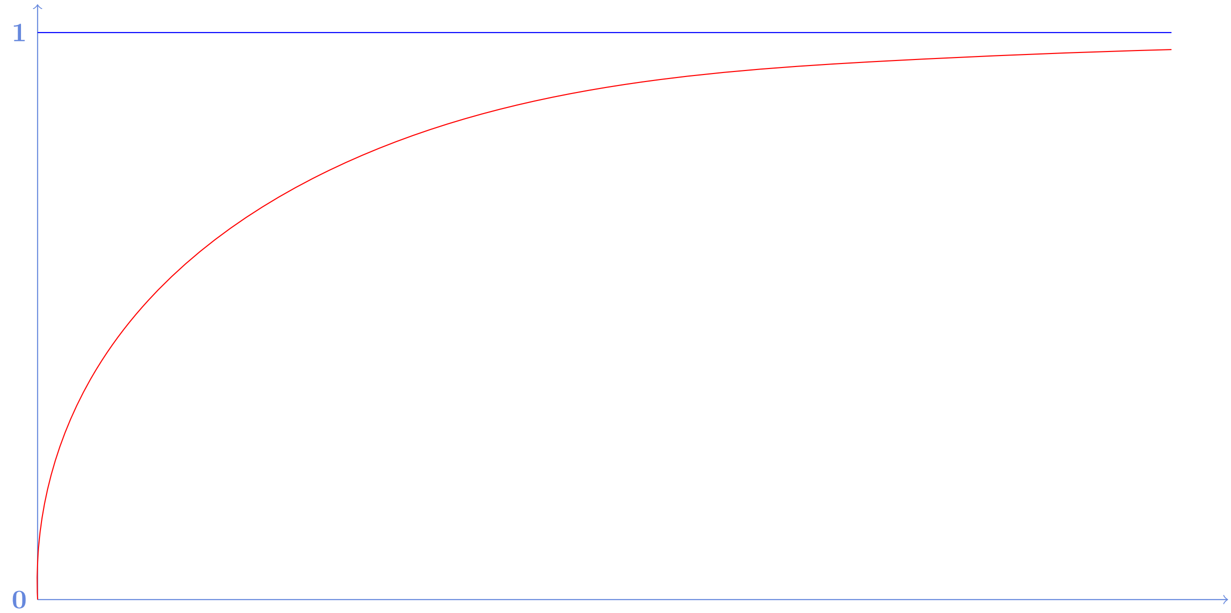
$$C'(q) = -1 * -1 * e^{(-q)} = e^{(-q)}$$

Malheureusement, si le coût marginal est positif, il reste décroissant

Deuxième étape Il y a une bonne raison pour laquelle on ne trouve pas d'exemple de fonction de coût dont le coût marginal est positif et croissant, mais toujours compris entre 0 et 1 : parce qu'il n'y en a pas

Si on regarde graphiquement à quoi ressemble une fonction croissante bornée, c'est la limite finie qui va donner

une de ses propriétés essentielles : ne pas être convexe :



cad que les coûts marginaux doivent obligatoirement décroitre à partir d'un certain temps
Formellement, on raisonne PAR L'ABSURDE. Si l'on suppose que C est convexe (et que $C(0) = 0$ et que $C(1) > 0$), alors, par définition d'une fonction convexe, on peut écrire pour tout $a, b \geq 0$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ la relation :

$$C\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) \leq \lambda C(a) + (1 - \lambda)C(b)$$

Si on applique cette relation pour $b = 0$ pour $a = x$ et pour $\lambda = 1/x$ (en supposant que $x \geq 1$), on a la relation

$$C(1) \leq \frac{1}{x}C(x)$$

que l'on écrit encore

$$C(x) \geq C(1)x,$$

ce qui dénie le fait que la fonction $C(x)$ puisse être bornée par 1, puisque $\lim_{x\to+\infty} C(1)x = +\infty$
Remarque : Cette dernière preuve n'est pas exigible à l'examen

3 QCM Radio de la brève sur les dérivées

Lire la brève sur les dérivées (lien : `https://utbox.univ-tours.fr/s/tpYFtRpsLBNjDE4`) et réaliser le QCM en dernière page, jusqu'à temps que vous ayez fourni toutes les bonnes réponses et, seulement les bonnes réponses. On téléchargera le fichier pour l'ouvrir avec l'application gratuite Acrobat Reader pour que les boutons radio fonctionnent.

4 Limites

1) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis, s'il y a lieu, interpréter les résultats obtenus en terme d'asymptotes. On prendra soin, quand cette limite se présente comme une indétermination, d'expliquer comment vous levez l'indétermination.

$$-5x^3 + 3x^2 - 8x + 2 \qquad \frac{4x^3 - 2}{x - 5} \qquad \frac{3x - 1}{x - 2}$$

Il s'agit pour chacune des fonctions de déterminer d'abord l'ensemble de définition et ses bornes, puis de rechercher la limite
La première fonction $-5x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$. On recherche donc les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

- A priori la limite en $+\infty$ de la première fonction est indéterminée, de la forme $(+\infty)-(+\infty)$. Classiquement, on met en facteur le terme qui a la croissance la plus élevée, soit ici $-5x^3$, et généralement, le produit obtenu n'est plus indéterminé. Vérifions le dans le cas : $-5x^3+3x^2-8x+2 = x^3\left(-5+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$; le terme dans la parenthèse tend vers - 5, le terme x^3 tend vers plus l'infini : il n'y a plus d'indétermination, car $-5*(+\infty)=(-\infty)$, on conclue $\lim_{x\to+\infty} -5x^3+3x^2-8x+2=-\infty$

- On traite de la même manière la limite en $-\infty$ en utilisant la même factorisation $-5x^3+3x^2-8x+2 = x^3\left(-5+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$; le terme dans la parenthèse tend vers - 5, le terme x^3 tend vers moins l'infini ; on conclue $\lim_{x\to+\infty} -5x^3+3x^2-8x+2=+\infty$

La seconde fonction $\dfrac{4x^3-2}{x-5}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$ et 5^- et 5^+. On a donc 4 limites à calculer.

- Pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$, on opère la factorisation du terme qui croit le plus vite au numérateur par le terme qui croit le plus vite au dénominateur

$$\frac{4x^3-2}{x-5}=\frac{x^3}{x}\frac{4-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{5}{x}}=x^2\frac{4-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{5}{x}}$$

La fraction tend vers 4 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, x^2 diverge, vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et on peut conclure $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3-2}{x-5}=+\infty$

- Il y a moins de manipulation quand on recherche les limites en 5^- et en 5^+. En effet, en 5^-, la limite est du type $498/0^-$ et en 5^+ la limite est du type $498/0^+$. on peut conclure $\lim_{x\to5^-}\dfrac{4x^3-2}{x-5}=-\infty$ et $\lim_{x\to5^+}\dfrac{4x^3-2}{x-5}=+\infty$

La troisième fonction $\dfrac{3x-1}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$ et 2^- et 2^+. On a donc 4 limites à calculer. En utilisant les mêmes méthodes, on trouve $\lim_{x\to2^+}\dfrac{3x-1}{x-2}=+\infty$, $\lim_{x\to2^-}\dfrac{3x-1}{x-2}=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x-2}=3$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x-2}=3$,

2) Appliquer la règle de l'Hopital pour lever l'indétermination des limites suivantes, quand $x\to0$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\qquad\frac{x}{\ln(1+x)}\qquad\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1}\qquad x\ln(x)$$

Pour chacun des exemples il convient déjà de vérifier que la limite est indéterminée de type 0/0, et de calculer les dérivées du numérateur et du dénominateur. Lé règle de l'Hopital s'applique si la dérivée du dénominateur n'est pas nulle.

Pour le premier exemple, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ le numérateur tend vers ln(1)=0, et le dénominateur vers 0. Le numérateur est dérivable, sa dérivée est $1/(1+x)$, soit en zéro : 1. Le dénominateur est dérivable, sa dérivée est 1. La règle de l'Hopital s'applique. On conclue $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1/1=1$

Le second exemple est à peu près identique, sauf que numérateur et dénominateurs sont inversés. On conclue $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1/1=1$

Pour le troisième exemple, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1}$ le numérateur tend vers $\sqrt{0}=0$, et le dénominateur vers $\sqrt{1}-1=0$. Le numérateur est dérivable, sa dérivée est $1/2\sqrt{x}$, soit en 0^+ : $+\infty$. Le dénominateur est dérivable, sa dérivée est $1/2\sqrt{x+1}$, soit en 0^+, $1/2$. La règle de l'Hopital s'applique. On conclue $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1}=+\infty$

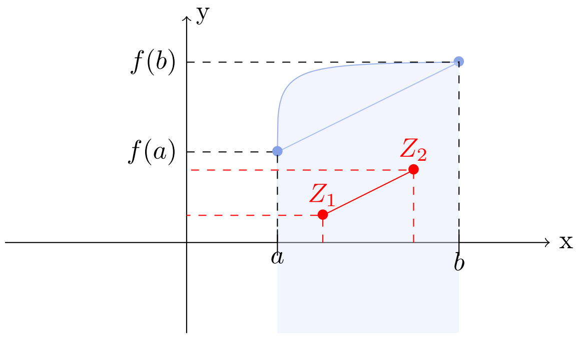
Le quatrième exemple, $x\ln(x)$ ne ressemble pas à un exemple d'application de la règle de l'Hopital. Il est cependant indéterminé puisque la limite en 0^+ est de type $0*(-\infty)$. On peut cependant écrire ce produit sous la forme de la fraction suivante :

$$\frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

et là, l'indétermination est bien de type $0/0$. Sous cette forme numérateur x est dérivable, sa dérivée est 1. Par ailleurs, le dénominateur $\frac{1}{\ln(x)}$ est dérivable, sa dérivée est $\frac{-1}{(\ln(x))^2}*1/x=-\frac{-x}{(\ln(x))^2}$, dont la dérivée a pour limite en 0^+, $0/\infty=0$. La règle de l'Hopital ne s'applique pas quand la dérivée du dénominateur tend vers 0.

5 Ensembles convexes

1) Soit une fonction $x \to f(x)$ concave définie sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que l'ensemble $\{(x, y)/y \leq f(x)\}$ est convexe.

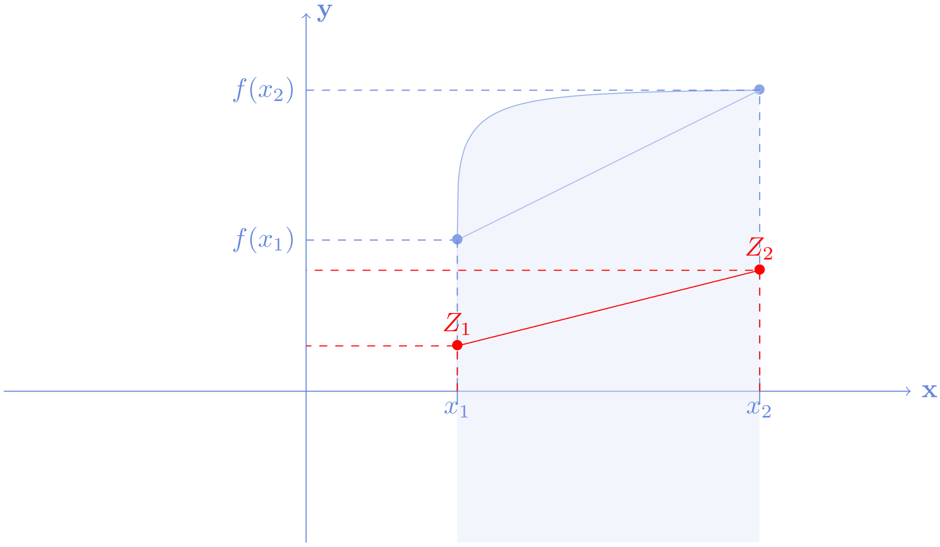


Première Méthode : Considérons maintenant deux points $Z_1(x_1, y_1)$ et $Z_2(x_2, y_2)$ quelconques dans l'ensemble $\{(x, y)/y \leq f(x)\}$. On a par définition $y_1 \leq f(x_1)$ et $y_2 \leq f(x_2)$. Considérons un point entre Z_1 et Z_2 de coordonnées $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_1) \\ &\leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \end{aligned}$$

la première inégalité due au fait que Z_1 et Z_2 sont sous la courbe f, la seconde inégalité provenant de f concave. Donc $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2$ appartient bien à $\{(x, y)/y \leq f(x)\}$, ce qui achève de démontrer que cet ensemble est convexe.

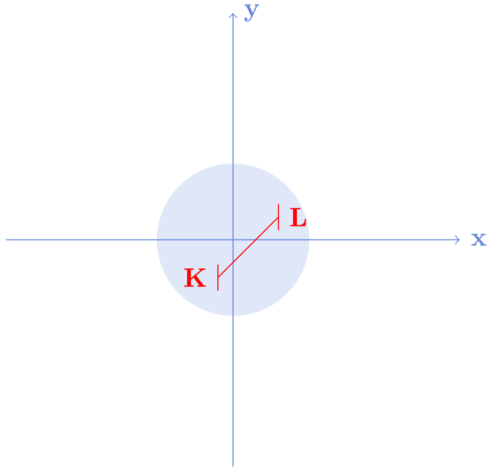
Seconde Méthode : Considérons maintenant deux points $Z_1(x_1, y_1)$ et $Z_2(x_2, y_2)$ quelconques dans l'ensemble $\{(x, y)/y \leq f(x)\}$. Par définition $y_1 \leq f(x_1)$ et $y_2 \leq f(x_2)$. Donc, le segment qui lie Z_1 à Z_2 est en dessous du segment qui relie $(x_1, f(x_1))$ à $(x_2, f(x_2))$. Or, comme f est concave, on sait que f est au dessus de toutes ses cordes, et, en particulier, au-dessus du segment qui relie $(x_1, f(x_1))$ à $(x_2, f(x_2))$. Par transitivité, on en déduit que f est au dessus du segment qui lie Z_1 à Z_2 : dit autrement, tout point (x_3, y_3) de ce segment est tel que $y_3 \leq f(x_3)$, donc un élément de $\{(x, y)/y \leq f(x)\}$, ce qui achève de démontrer que cet ensemble est convexe.



2) Montrer, par tout argument que vous jugerez adéquat que les ensembles suivants du Plan sont convexes

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad x^{-3} + y^4 \leq 1(\ pour x \in [1, 3])$$

Commençons par le premier ensemble d'équation $x^2+y^2 \leq 1$ est le disque unité bien connu :



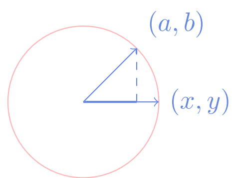
Il s'agit de démontrer que si $K(x,y)$ et $L(a,b)$ appartiennent au disque, alors il en est pareil de tout point $\lambda K+(1-\lambda)L$ du segment AB, de coordonnée $(\lambda x+(1-\lambda)a, \lambda y+(1-\lambda)b)$. Il nous faut donc vérifier l'équation

$$(\lambda x+(1-\lambda)a)^2+(\lambda y+(1-\lambda)b)^2 \leq 1$$

Notons $k=(\lambda x+(1-\lambda)a)^2+(\lambda y+(1-\lambda)b)^2$. En développant, on trouve

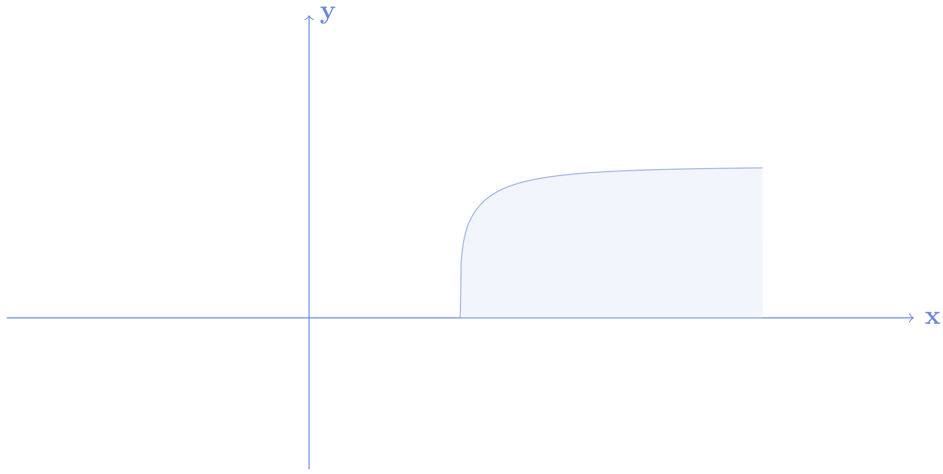
$$\begin{aligned}
k &= (\lambda^2x^2+2\lambda(1-\lambda)ax+(1-\lambda)^2a^2)+(\lambda^2y^2+2\lambda(1-\lambda)yb+(1-\lambda)^2b^2) \\
&= \lambda^2(x^2+y^2)+2\lambda(1-\lambda)(ax+by)+(1-\lambda)^2(a^2+b^2) \\
&\leq \lambda^2+2\lambda(1-\lambda)(ax+by)+(1-\lambda)^2 \\
&= \lambda^2+2\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)[(ax+by)-1] \\
&= (\lambda+(1-\lambda))^2+2\lambda(1-\lambda)[(ax+by)-1] \\
&= 1-2\lambda(1-\lambda)[1-(ax+by)] \leq 1 \qquad \forall \lambda \in [0,1],
\end{aligned}$$

the first inequality coming from the fact that (x,y) and (a,b) belongs to the unit disk, the second inequality coming from the fact that the scalar product between two vectors which lenght is less or equal one is less or equal than one (see for instance next figure).



Continuons par le second ensemble d'équation $x^{-3}+y^4 \leq 1$ pour $x \in [1,3]$ qu'on peut réécrire $y^4 \geq 1-x^{-3}$ ce qui s'écrit $y \geq (1-x^{-3})^{1/4}$, ensemble dont la frontière dont la frontière a pour équation $y=(1-x^{-3})^{1/4}$ qu'on peut

représenter ainsi, :

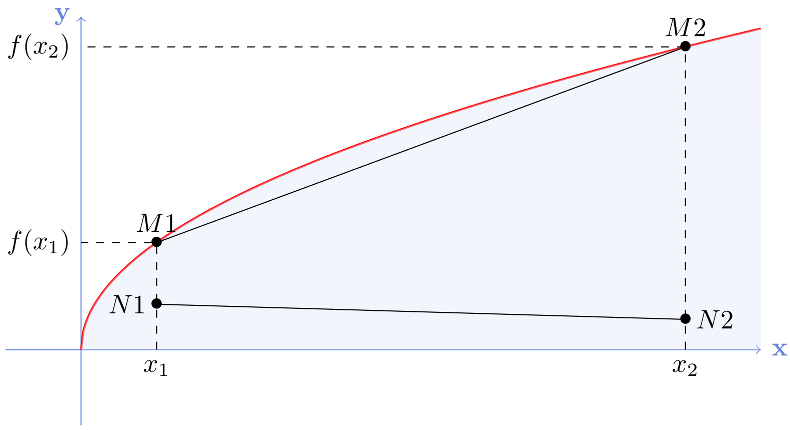


Ici il apparait que l'ensemble qui est sous la fonction $y = f(x)$ avec $f(x) = (1 - x^{-3})^{1/4}$ est convexe, car cette fonction est concave (résultat de la première question). Regardons un peu plus les détails.
$f(x) = (1 - x^{-3})^{1/4}$ **est bien une fonction croissante concave. En effet,** $f'(x) = \frac{1}{4}(1 - x^{-3})^{-3/4} * -1 * -3x^2 = \frac{3x^2}{4}(1 - x^{-3})^{-3/4} > 0$ **et** $f''(x) = \frac{6x}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} + \frac{3x^2}{4}\frac{-3}{4}(1-x^{-3})^{-7/4} * -1 * -3x^2$ **qu'on peut réécrire** $f''(x) = \frac{3}{16}(1-x^{-3})^{-7/4}[8(1-x^{-3}) - 9] = \frac{3}{16}(1 - x^{-3})^{-7/4}[-1 - x^{-3}] < 0$**.**

> On appelle Ensemble de production, dans le cas d'une firme qui produit un bien manufacturé à partir d'un intput l'ensemble des points $\{(x, y)\}$ tels que la quantité y (ou inférieure) de bien manufacturé qui peut être produite à partir d'une quantité x d'input. On appelle fonction de production $f(x)$ le maximum de bien manufacturé produit à partir de la quantité x d'input

3) Montrer que dans le cas d'une firme avec un input et un output, si l'ensemble des plans de production est convexe, alors la fonction de production est concave et vice versa. On prendra soin de faire une démonstration par un graphique commenté, et, si nécessaire une démonstration plus formelle.

L'énoncé nous indique de partir d'un ensemble de production convexe, comme dans la figure ci-après, où x désigne la quantité d'input utilisé et y la quantité de bien produits :



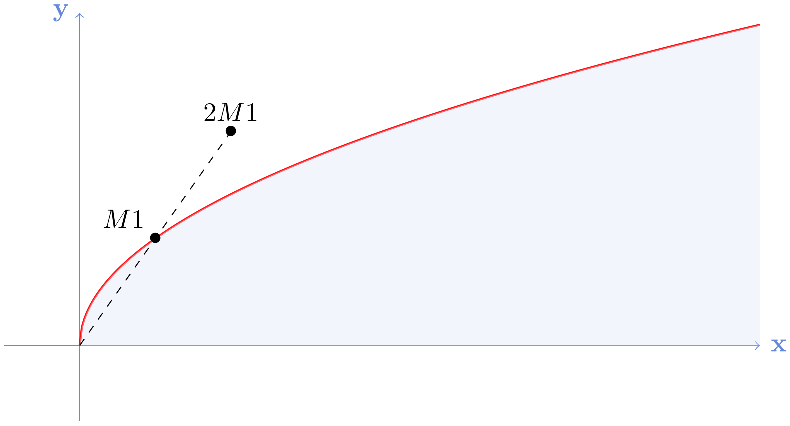
On a pris soin de tracer la limite supérieure de l'ensemble de production qui n'est autre que la fonction $f(x)$, cad le montant maximal de bien manufacturé produit à partir de x. L'ensemble de production est donc l'ensemble des points situés sous la fonction f.

<u>Montrons que si f est concave, alors l'ensemble de production est convexe</u> Soient deux plans de production situés sur la frontière $M1(x_1, f(x_1)$ et $M2(x_2, f(x_2)$. L'ensemble des points situés entre $M1$ et $M2$ est ce qu'on appelle une corde, et par définition, quand f est concave, cela reste "en-dessous" de f. Donc, dans ce qu'on appelle l'ensemble de production. Si on part de deux autres plans de production quelconques $N1$ et $N2$, on trace les

plans de productions $M1$ et $M2$ situés sur la frontière correspondants, et le segment $N1N2$ est en dessous du segment $M1M2$ qui est compris dans l'ensemble de production : donc $N1N2$ est dans l'ensemble de production.
Montrons que si l'ensemble de production est convexe , alors f est concave Prenons une corde sur f, de type $M1$ $M2$: les deux points correspondants appartiennent à l'ensemble de production, donc l'ensemble des points sur le segment $M1$ $M2$ appartiennent à l'ensemble de production puisque ce dernier est convexe. Donc le segment $M1$ $M2$ reste en dessous de f. Et on sait qu'une fonction qui reste au-dessus de ses cordes est concave. cqfd.

4) Lorsque vous avez un plan de production convexe, est-ce que si vous pouvez produire y à partir de x, vous est-il en général possible de produire $2y$ à partir de $2x$?

La réponse est en général non. En effet, regardons déjà graphiquement, en reprenant le graphique précédent ;



si on prend $M1$ sur la frontière, alors $2M1$ ne l'est pas.[L'hypothèse qui est cachée dans le graphique est $f(0) = 0$, cad que $(0, 0)$est sur la frontière de l'ensemble de production.] Plus formellement, puisque f est strictement concave : '

$$x = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2X \quad \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2X) = \frac{1}{2}f(2X)$$

soit encore $f(2x) < 2f(x)$ ce qui montre que le point $(2x, 2f(x))$ n'est pas dans l'ensemble de production

5) interpréter la question 3) à la lumière de la questions précédente. Pourquoi est-on interressé à avoir un ensemble de production convexe.

La première interprétation est de dire que si on a deux plans de production $M1$ et $M2$, on peut prendre une combinaison linéaire des deux , cad $\lambda M1 + (1 - \lambda)M2$.

Dit plus généralement, on peut toujours combiner deux idées (deux plans), pour produire une certaine quantité de bien manufacturé.

Ce qui est absolument à retenir est que lorsque la technologie est convexe, on ne peut pas multiplier par deux les inputs pour multiplier par deux les outputs. On parle alors de rendement d'échelle décroissants.

Fin du corrigé du TD 6