Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 6

Optimisation avec contrainte : (a) de la saturation de la contrainte ; (b) des conditions secondes

Automne 2021

Pour ce TD on doit bien comprendre, lorsqu'on aborde un programme d'optimisation avec contrainte, quand et pourquoi la contrainte est saturée ou non (vu TD précédents), les conditions premières (vu TD précédents) et enfin les conditions secondes qui indiquent si les candidats que l'on a recherché sont ou non les solutions de l'optimisation. On se concentre uniquement sur le cas où la fonction objectif est quasi-concave et la contrainte un convexe.

On rappelle qu'un point (x, y) est dit *point stationnaire* du programme $\max_{x,y}\ f(x, y)$ *s.c.* $g(x, y) \geq 0$ dans le cas où ce dernier sature sa contrainte $(g(x, y) = 0)$, lorsque la conditiona $f_x/g_x = f_y/g_y$ est satisfaite.	Etant donné (x, y) un point stationnaire du programme $\max_{x,y}\ f(x, y)$ *s.c.* $g(x, y) \geq 0$ qui sature la contrainte $(g(x, y) > 0)$, alors si f est quasiconcave et si l'ensemble $\{g(x, y) \geq 0\}$ est convexe, c'est une solution du programme. Plus précisément, étant donné f *quasiconcave*, si l'ensemble $g(x, y) \geq 0$ est convexe, alors (x^*, y^*) intérieur au domaine maximise $f(x, y)$ s.c. $g(x, y) = 0$ si et seulement si (x^*, y^*) est stationnaire.	La méthode pour résoudre un programme de maximisation consiste toujours en plusieurs étapes 1. l'étude de la saturation de la contrainte 2. l'écriture des conditions premières 3. la vérification d'au moins une condition seconde

1 Contrainte saturée ou non

1) Redire dans vos mots comment s'applique le théorème qui indique que si (x, y) est une solution *intérieure* du programme $\max_{x,y}\ f(x, y) s.c. g(x, y) \geq 0$, et si en ce point, l'une des deux dérivées fx ou fy n'est pas nulle, alors la contrainte est saturée.

L'idée n'est pas de calculer les points stationnaires (car justement on a dans la plupart des cas besoins d'utiliser la contrainte saturée). Mais de voir si les candidats (x, y) satisfaisant les conditions premières et qui seraient intérieures vérifient ou non la non-nulité des dérivées premières.

2) Donner en mots simples une intuition de ce résultat.

Si la solution (x, y) est à l'intérieur, ou, équivalemment, si la contrainte n'est pas saturée, c'est-à-dire que toute variation infinitésimale autour de (x, y) est possible, en ce sens que la contrainte est encore vérifiée, alors nécessairement f a un maximum local en ce point (x, y), ce qui implique, comme on le sait depuis le chapitre II que toutes les dérivées partielles sont nulles.

3) Dire dans les deux cas si les programmes ont ou non les mêmes solutions. (on parlera alors de programmes équivalents.)

$$Max_{x_1,x_2>0}\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ \ s.c.\ \ x_1x_2 \geq 1 \quad \boxed{\text{et}} \quad Max_{x_1,x_2>0}\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ \ s.c.\ \ x_1x_2 = 1 \qquad \Bigg| \qquad Max_{q,p\geq 0}\ \ q(p-c)\ \ s.c.\ \ q \geq 100-p \quad \boxed{\text{et}} \quad Max_{q,p\geq 0}\ \ q(p-c)\ \ s.c.\ \ q = 100-p$$

Dans les deux questions, il s'agit de regarder le programme avec inégalité, et déterminer, comme dans le cas précédent si sa contrainte est saturée à l'optimum. Si la contrainte du programme avec inégalité est saturée, le programme avec inégalité pourrait être équivalent au programme avec égalité ... (ATTENTION) à la condition que la solution existe. L'écueil ici est de bien vérifier que le programme écrit avec une inégalité a bien une solution. Et s'il n'en a pas, il faut y regarder de plus près.

Les programmes

$$Max_{x_1,x_2>0}\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ \ s.c.\ \ x_1x_2 \geq 1 \quad \textbf{ET} \quad Max_{x_1,x_2>0}\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ \ s.c.\ \ x_1x_2 = 1$$

sont-ils équivalents ? Cette question revient exactement à savoir si dans le programme avec inégalité, la contrainte est saturée à l'optimum.

Or dans le programme avec inégalité, si $x_1x_2 > 1$, on pourrait diminuer de façon infinitésimale x_1 ou x_2 de manière à ce que la contrainte soit encore satisfaite. Chacune de ces opérations conduirait à ce que l'objectif $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

grandisse, ce qui contredirait que l'on soit à l'optimum. Donc si le programme contraint a une solution, cette solution satisfait la contrainte

Pour conclure à l'équivalence des programme, il reste encore à étuder si l'un ou l'autre des programme écrit avec une contrainte sous forme d'inégalité ne diverge pas.

OR ICI, les deux programmes divergent !

En effet, quand on considère la contrainte $x_1x_2 = 1$, on peut choisir x_1 très petit, aussi petit que l'on veut : par exemple $x_1 = 1/n$ (et $x_2 = n$) et du coup l'objectif sera d'autant plus grand, supérieur dans mon exemple à $n + 1/n = n$. Donc, avec cette contrainte, l'objectif peut être aussi grand que l'on veut. Le/les programmes divergent.

En conclusion : les deux programmes sont équivalents !

Les programmes

$$\begin{array}{ll} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q \geq 100-p \end{array} \quad \boxed{\text{et aussi}} \quad \begin{array}{ll} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q = 100-p \end{array}$$

sont-ils équivalents ? Cette question revient exactement à savoir si dans le programme avec inégalité, la contrainte est saturée à l'optimum.

Or, en tout point (q,p) tel que $q > 100 - p$, si on augmente q, de façon infinitésimale, ou même de façon brutale, la contrainte reste encore satisfaite, et on augmenterait l'objectif (sous bien sûr la considération qu'à l'optimum, on devrait avoir $p > c$, car on peut, dans ce programme obtenir plus que zéro ou tout nombre négatif). Ceci doit vous mettre la puce à l'oreille. La contrainte $q > 100 - p$ n'en est pas vraiment une dans ce problème : on peut choisir q très grand. Et justement, quand q est très grand, l'objectif sera lui aussi très grand. On doit en conclure que le programme

$$\begin{array}{ll} Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \\ s.c. & q \geq 100-p \end{array}$$

diverge.

Pour conclure que les deux programmes - contrainte écrite comme égalité - contrainte écrite comme inégalité sont non équivalents, il faut étudier le programme - contrainte écrite comme égalité, et montrer qu'il ne diverge pas. Or, donné que q et p sont des nombres positifs ou nuls, la contrainte $p + q \leq 100$, délimite un triangle, borné. La fonction objectif, définie et calculée en tous les points de ce triangle ne peut diverger.

4) Dans les programmes suivants, la contrainte est écrite avec égalité. Bien évidemment, la question de la saturation de la contrainte ne se pose pas. Dans cette question on vous propose une démarche originale, de modifier légèrement le programme considéré, en écrivant la contrainte sous forme d'inégalité, tout en obtenant un programme équivalent.

$$\begin{array}{ll} D = Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_1} \\ s.c. & x_1x_2 = 2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ll} E = Max_{q,c} & q(p-c) \\ s.c. & q = 100-p \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ll} F = Max_{x_1,x_2,x_3} & x_1x_2x_3 \\ s.c. & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ll} G = Max_x & \ln(x) + e^x \\ s.c. & x = 1 \end{array}$$

En d'autre termes, on vous demande pour chacun des programmes suivants d'écrire un programme équivalent, où la contrainte se retrouve comme une inégalité.

5) Résolvez les programmes précédents en donnant les valeurs de D, E, F et G.

A	$x_1 = \sqrt{2}/2$	$x_2 = \sqrt{2}/2$	
B	$p = 60$	$q = 40$	**Vous avez appris à résoudre ce programme l'an dernier (monopole)**
C	$c = p^2$	$q = 2p$	**Programme *a priori* différent de la firme en CPP vu l'an dernier, car ici, on choisit c. Mais dans le fonds, c'est le programme en CPP où on précise la valeur du coût c.** p **est un paramètre.**
D	$x_1 =$	$x_2 =$	**Le programme diverge**
E	$q = 100 - p$	$c = 0$	**La solution de ce programme est triviale. Il n'y a cependant pas d'interprétation économique de ce programme.**
F	$x_1 = 2$	$x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3}$	**Une étape : les conditions premières** $\frac{x_2x_3}{1} = \frac{x_1x_3}{2} = \frac{x_1x_2}{3}$, **une seconde étape, la contrainte saturée.**
G	$x = 1$	$=$	**Il n'y a pas vraiment de surprise ni de travail d'analyse à réaliser !**

2 Vers l'application des conditions secondes

1) Dire si les fonctions de deux variables suivantes sont concaves ou quasi-concaves. Commenter.

$$g(x,y) = x^2y^3 \qquad g(y) = \sqrt{y} \qquad g(x,y) = x\sqrt{y} \qquad g(x,y) = x^{1/2}y^{1/3} \qquad g(x,y) = \sqrt{xy}$$

[hint : On essaiera de voir si (i) les conditions pour la concavité sont ou non respectées. Si non, (ii) on analysera la quasi-concavité, propriété plus souvent satisfaite et plus facile à vérifier. Pour la quasi-concavité, on vérifiera la décroissance du rapport g_x/g_y

Fonction	Concave	Quasi-concave	Remarques
$g(x,y)=x^2y^3$	**NON**	**OUI**	**$\Delta=-24x^2y^4$: ce critère ne permet pas de conclure. Mais il suffit de considérer la fonction dans le sous ensemble $y=1$ pour remarque que la fonction d'une variable, $g(x,1)=x^2$ n'est pas concave. Donc $g(x,y)=x^2y^3$ ne saurait être concave.** ***Pour la quasiconcavité*, $TMS=2y/3x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x\uparrow$ et $y\downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**
$g(y)=\sqrt{y}$	**OUI**	**Sans objet**	**Traitée comme une fonction de une variable, cette fonction est concave. $g_{yy}<0$. On sait donc que $\sqrt{\lambda x+(1-\lambda)y}\geq\lambda\sqrt{x}+(1-\lambda)\sqrt{y}$.**
$g(x,y)=x\sqrt{y}$	**NON**	**OUI**	**Comme $g_{xx}=0$ et que $g_{xy}\neq 0$, on a $\Delta<0$: ce critère ne permet pas de conclure. Il y a un argument supplémentaire qui montre que la fonction n'est pas concave. En effet, considérez deux points (0,0) et (x,y). Si la fonction est concave, on devrait avoir $g(\lambda x,\lambda y)\geq\lambda g(x,y)+(1-\lambda)G(0,0)$, soit $\lambda x\sqrt{\lambda y}\geq\lambda x\sqrt{y}+0$, ce qui n'est manifestement jamais vrai quand $\lambda\leq 1$.** ***Pour la quasiconcavité*, $TMS=2y/x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x\uparrow$ et $y\downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**
$g(x,y)=x^{1/2}y^{1/3}$	**OUI**	**OUI**	**On vérifie que $\Delta=\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{36}\right)x^{-1}y^{-4/3}>0$ et que $g_{xx}<0$ et que $g_{yy}<0$. La condition suffisante s'applique bien, et on en conclue que cette fonction est concave, comme on en avait l'intuition.** ***Pour la quasiconcavité*, on retiendra qu'une fonction concave est toujours quasi-concave. Si on voulait vérifier la quasi-concavité à la main : $TMS=3y/2x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x\uparrow$ et $y\downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**

Enfin, pour le dernier exemple, c'est un peu plus long :

Fonction	Concave	Quasi-concave	Remarques
$g(x,y)=x^{1/2}y^{1/2}$	**OUI**	**OUI**	**On vérifie que $\Delta=0$. On ne peut pas appliquer la condition suffisante. Pour démontrer la concavité de cette fonction, il nous faut montrer, lorsque l'on considère deux points $P1=(x_1,y_1)$ et $P2=(x_2,y_2)$ et un coefficient λ que** $g(\lambda P1+(1-\lambda)P2)\geq \lambda g(P1)+(1-\lambda)g(P2) \qquad \text{(E)}$ **Or si l'on travaille par équivalence successive, l'équation (E) est équivalente à** $\sqrt{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\sqrt{\lambda y_1+(1-\lambda)y_2}\geq \lambda\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}+(1-\lambda)\sqrt{x_2}\sqrt{y_2}$ $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\geq \lambda^2 x_1y_1+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1y_1x_2y_2}+(1-\lambda)^2x_2y_2$ $\lambda(1-\lambda)(x_1y_2+x_2y_1)\geq 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1y_1x_2y_2}$ $\sqrt{\frac{x_1y_2}{x_2y_1}}+\sqrt{\frac{x_2y_1}{x_1y_2}}\geq 2$ **Or la dernière inégalité est toujours vraie, car le membre de gauche est la somme d'un nombre et de son inverse, qui, quels qu'ils soient, est toujours supérieure ou égale à 2. On en déduit que la fonction g est concave.** ***Pour la quasiconcavité***, **$TMS=2y/3x$, cette quantité décroit le long d'une courbe de niveau, quand $x\uparrow$ et $y\downarrow$: la fonction g est quasi-concave.**

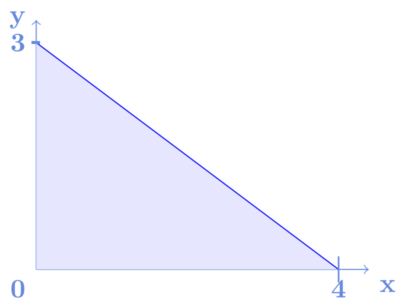
Le commentaire général est : 1) les fonctions sont beaucoup plus souvent quasi-concaves que concaves. Et dans ce chapitre d'optimisation, le critère dont on a besoin c'est la quasi-concavité
Second commentaire : 2) Il est souvent assez ardu de démontrer la concavité d'une fonction. En fait, les mathématiciens ont des théorèmes un peu plus généraux sur la concavité, qui dépassent le cadre de ce cours, et qui permettent assez aisément de vérifier directement la concavité (ou la convexité) d'une fonction. Il s'agit de savoir calculer des valeurs propres, la trace et le déterminant de la matrice Hessienne, ce qui est hors sujet
Troisième commentaire : 3) Au-delà de l'aspect technique, vous pouvez retenir dans les exemples précédents, qui sont un peu tous similaires, que lorsuq'il y a rendement décroissant, il y a peut-être une chance que la fonction correspondante soit concave. Mais si ce commentaire ne vous aide pas, ce n'est pas grave non plus. Ce commentaire ne vous sera pas demandé à l'examen.

2) Montrer que les différents ensembles suivants, définis lorsque $x\geq 0$ et $y\geq 0$ sont convexes. [Utiliser tout votre savoir et/ou représenter]

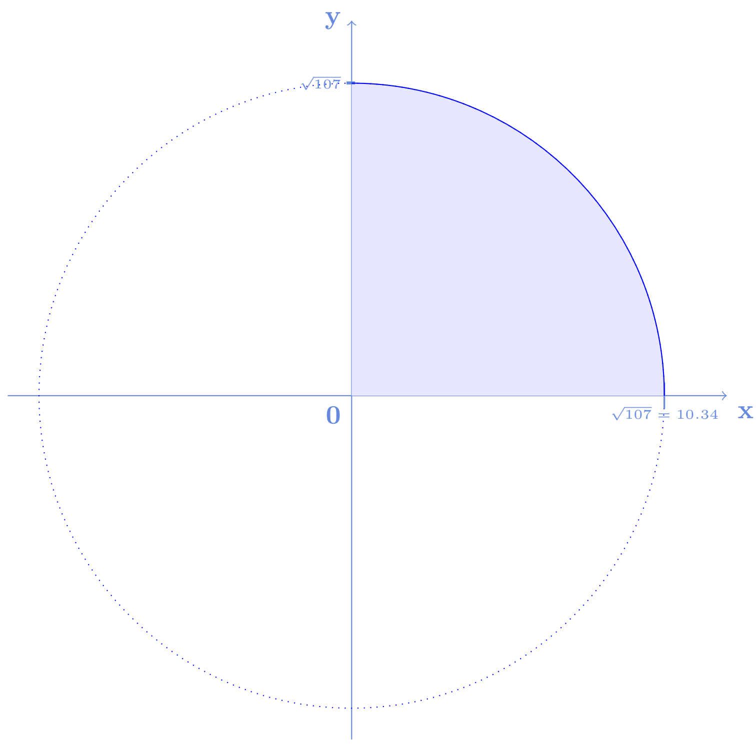
$$3x+4y\leq 12 \qquad x^2+y^2\leq 107 \qquad (x-1)^2+y^2\leq 1$$

premier cas : $3x+4y\leq 12$ Il s'agit de la célèbre contrainte budgétaire dans le cas d'un marché à deux biens, où x désigne la quantité d'un bien qu'on achète au prix de 3, y, la quantité d'un bien qu'on achète au prix de 4 et où le revenu est 10. L'étudiant sait que c'est un triangle délimité par l'axe horizontal, l'axe vertical et la

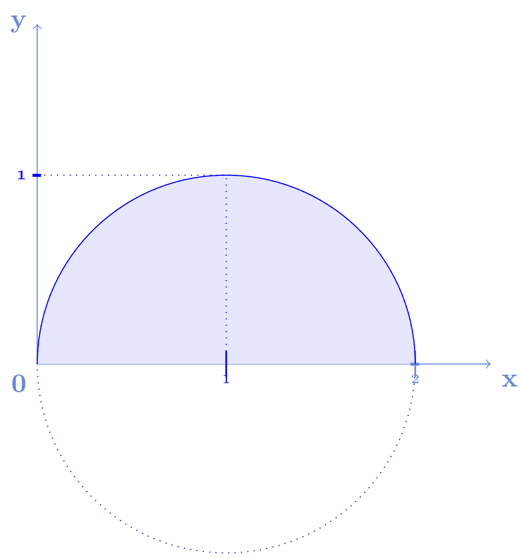
droite d'équation $3x + 4y = 10$: c'est un triangle, convexe par nature :



Second cas : $x^2 + y^2 \leq 107$ Il s'agit d'un quart de disque centré en $(0,0)$ de rayon $\sqrt{107}$ délimité par le cercle centré en $(0,0)$ de rayon $\sqrt{107}$, convexe par nature

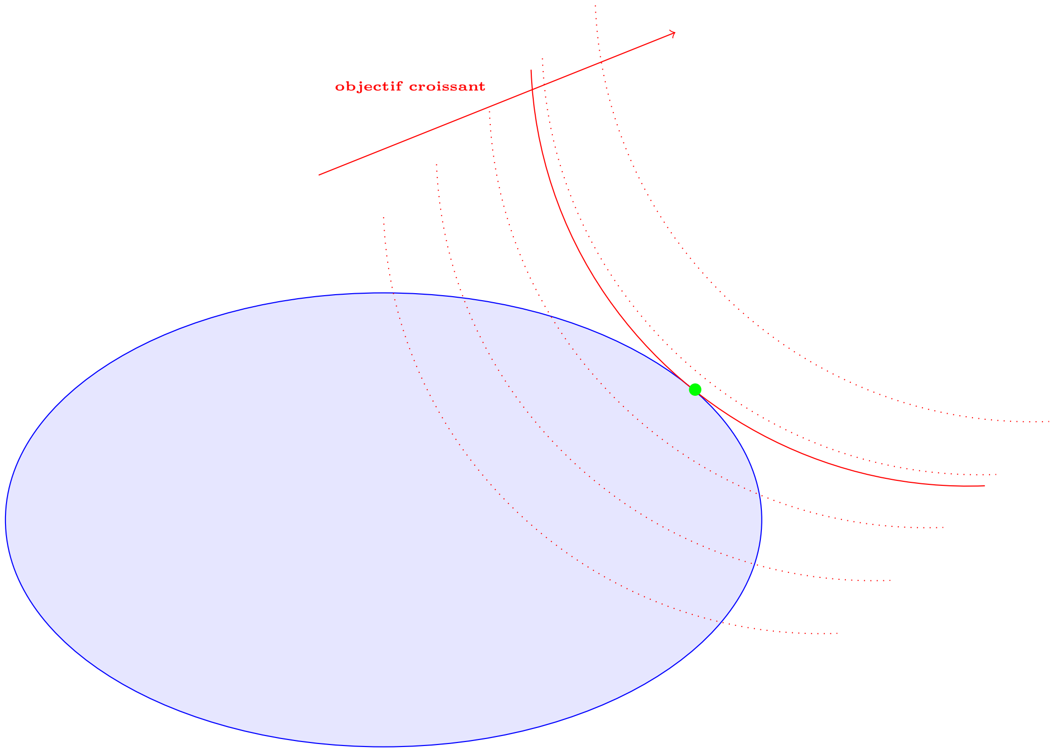


Troisième cas : $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ Il s'agit d'un demi disque centré en $(1,0)$ de rayon 1 délimité par le cercle centré en $(1,0)$ de rayon 1, convexe par nature



3) Expliquer intuitivement, éventuellement à l'aide d'un graphique, pourquoi lorsque l'objectif d'un programme avec contrainte est quasi-concave, et que la contrainte forme un ensemble convexe, tout point stationnaire est une solution du programme.

Le dessin dans le cas général est le suivant



En bleu, la surface représentée par la contrainte. En rouge, différentes valeurs possibles de l'objectif, avec en rouge trait-plein le niveau de l'objectif le plus haut possible, compatible avec la contrainte.
Le point d'intersection de la contrainte et de la courbe de niveau objectif correspondant au maximum est la solution : c'est un point stationnaire. La convexité des courbes de niveau objectif indique bien qu'on est à un maximum.

4) Résoudre le programme $\max_{x,y\geq 0} \quad x^2y^3 \ s.c. \ (x-1)^2+y^2 \leq 1$. Bien détailler les étapes de votre raisonnement.

Etape 1 : la contrainte est saturée **En effet, si elle n'était pas saturée, on aurait un programme non saturé qui divergerait, alors que la contrainte définit, comme on l'a vu précedemment un convexe borné, et donc, il existe une solution finie.**

Etape 2 : Recherche des points stationnaires **Si on appelle $f = x^2y^3$, l'objectif et $g = 1-y^2-(x-1)^2$, la contrainte, les différentes variables à calculer sont :**

$$f_x = 2xy^3 \ f_y = 3x^2y^3 \ g_x = -2(x-1) \ g_y = 2y$$

d'où l'on déduit les conditions premières :

$$\frac{2xy^3}{-2(x-1} = \frac{3x^2y^2}{-2y} \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 = 3x(x-1)$$

Les points stationnaires que l'on recherche (donné la contrainte saturée) satisfont le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 & = & \frac{3}{2}(x-1)^2 \\ y^2+(x-1)^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Système que l'on résoud par substitution :

$$\frac{3}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{2}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{\frac{2}{5}}$$

et aussi,

$$y^2 = \frac{3}{2} * \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Etape 3 : Conditions secondes **Les conditions secondes s'appliquent, puisque l'objectif est quasi-concave [cela a été démontré plus haut] et que la contrainte est un ensemble convexe [cela a été démontré plus haut]**
La solution unique de ce programme est donc

$$\boxed{x = 1 + \sqrt{\frac{2}{5}} \quad y = \sqrt{\frac{3}{5}}}$$

Fin du corrigé du TD 6