Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 6 - groupe 127

Optimisation avec contrainte : (a) de la saturation de la contrainte ; (b) des conditions secondes

Automne 2021

Pour ce TD on doit bien comprendre, lorsqu'on aborde un programme d'optimisation avec contrainte, quand et pourquoi la contrainte est saturée ou non (vu TD précédents), les conditions premières (vu TD précédents) et enfin les conditions secondes qui indiquent si les candidats que l'on a recherché sont ou non les solutions de l'optimisation. On se concentre uniquement sur le cas où la fonction objectif est quasi-concave et la contrainte un convexe.

On rappelle qu'un point (x, y) est dit *point stationnaire* du programme $\max_{x,y} \quad f(x, y) \; s.c. \; g(x, y) \geq 0$ dans le cas où ce dernier sature sa contrainte ($g(x, y) = 0$), lorsque la conditiona $f_x/g_x = f_y/g_y$ est satisfaite.	Etant donné (x, y) un point stationnaire du programme $\max_{x,y} \quad f(x, y) \; s.c. \; g(x, y) \geq 0$ qui sature la contrainte ($g(x, y) > 0$), alors si f est quasiconcave et si l'ensemble $\{g(x, y) \geq 0\}$ est convexe, c'est une solution du programme. Plus précisément, étant donné f *quasiconcave*, si l'ensemble $g(x, y) \geq 0$ est convexe, alors (x^*, y^*) intérieur au domaine maximise $f(x, y)$ s.c. $g(x, y) = 0$ si et seulement si (x^*, y^*) est stationnaire.	La méthode pour résoudre un programme de maximisation consiste toujours en plusieurs étapes 1. l'étude de la saturation de la contrainte 2. l'écriture des conditions premières 3. la vérification d'au moins une condition seconde

1 Contrainte saturée ou non

1) Redire dans vos mots comment s'applique le théorème qui indique que si (x, y) est une solution *intérieure* du programme $\max_{x,y} \quad f(x, y) s.c. g(x, y) \geq 0$, et si en ce point, l'une des deux dérivées fx ou fy n'est pas nulle, alors la contrainte est saturée.

2) Donner en mots simples une intuition de ce résultat.

3) Dire dans les deux cas si les programmes ont ou non les mêmes solutions. (on parlera alors de programmes équivalents.)

$$\begin{array}{llllllll} Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} & \boxed{\text{et}} & Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} & \Big| & Max_{q,p\geq 0} & q(p-c) \quad \boxed{\text{et}} \quad Max_{q,p\geq 0} \quad q(p-c) \\ s.c. & x_1x_2 \geq 1 & & s.c. & x_1x_2 = 1 & & s.c. & q \geq 100-p \qquad\qquad s.c. \quad q = 100-p \end{array}$$

4) Dans les programmes suivants, la contrainte est écrite avec égalité. Bien évidemment, la question de la saturation de la contrainte ne se pose pas. Dans cette question on vous propose une démarche originale, de modifier légèrement le programme considéré, en écrivant la contrainte sous forme d'inégalité, tout en obtenant un programme équivalent.

$$\begin{array}{llcllcllcll} D = Max_{x_1,x_2>0} & \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1} & \Big| & E = Max_{q,c} & q(p-c) & \Big| & F = Max_{x_1,x_2,x_3} & x_1x_2x_3 & \Big| & G = Max_x & \ln(x)+e^x \\ s.c. & x_1x_2 = 2 & & s.c. & q = 100-p & & s.c. & x_1+2x_2+3x_3 = 6 & & s.c. & x = 1 \end{array}$$

5) Résolvez les programmes précédents en donnant les valeurs de D, E, F et G.

2 Vers l'application des conditions secondes

1) Dire si les fonctions de deux variables suivantes sont concaves ou quasi-concaves. Commenter.

$$g(x, y) = x^2y^3 \qquad g(y) = \sqrt{y} \qquad g(x, y) = x\sqrt{y} \qquad g(x, y) = x^{1/2}y^{1/3} \qquad g(x, y) = \sqrt{xy}$$

[hint : On essaiera de voir si (i) les conditions pour la concavité sont ou non respectées. Si non, (ii) on analysera la quasi-concavité, propriété plus souvent satisfaite et plus facile à vérifier. Pour la quasi-concavité, on vérifiera la décroissance du rapport g_x/g_y

2) Montrer que les différents ensembles suivants, définis lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont convexes. [Utiliser tout votre savoir et/ou représenter]

$$3x + 4y \leq 12 \qquad x^2 + y^2 \leq 107 \qquad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

3) Expliquer intuitivement, éventuellement à l'aide d'un graphique, pourquoi lorsque l'objectif d'un programme avec contrainte est quasi-concave, et que la contrainte forme un ensemble convexe, tout point stationnaire est une solution du programme.

4) Résoudre le programme $\max_{x,y\geq 0} \quad x^2y^3 \; s.c. \; (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Bien détailler les étapes de votre raisonnement.

Fin du sujet du TD n° 6 - groupe 127