

1 La décision de produire ou non un bien public

un principal a pour projet de construire un pont dont le coût est c . La variable q prend la valeur $q = 1$ lorsque le pont est construit, et $q = 0$ quand le projet est abandonné. Il y a n agents, $i = 1, 2, \dots, n$ qui profitent de ce bien public, qui le financent à hauteur t_i et dont l'utilité nette est

$$u_i = \theta_i q - t_i,$$

où θ_i désigne le consentement à payer de i .

- 1) Calculer le surplus global de l'économie (en ajoutant au surplus des agents le surplus du principal égal aux transferts reçus moins le coût). Dire quel est le choix optimal en fonction de la distribution des caractéristiques $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

2 Le financement du bien public

La décision de produire, et le financement sont contingents aux caractéristiques des agents. On suppose que ces caractéristiques sont inconnues. Le principal a le pouvoir de contrôler les flux d'information, et peut en particulier s'engager sur des mécanismes de financement contingents aux déclarations des agents.

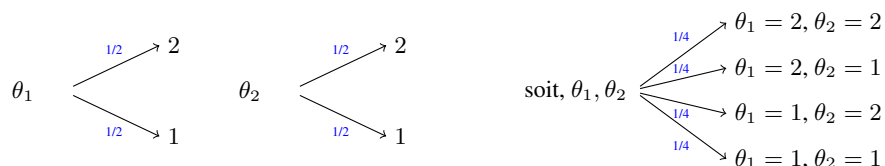
Mécanisme élémentaire du principal On analyse dans un premier temps le mécanisme selon lequel le financement de chacun sera proportionnel à sa déclaration. Plus particulièrement on retient le mécanisme qui permet au principal de percevoir c quelles que soient les déclarations des agents :

$$t_i = \frac{\hat{\theta}_i}{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j}.$$

- 2) On se restreint à deux joueurs, notés 1 et 2. Etablir ce que payent les deux agents en fonction de leurs déclarations. Remplir le tableau suivant

	$\hat{\theta}_2 = 1$	$\hat{\theta}_2 = 2$
$\hat{\theta}_1 = 1$		
$\hat{\theta}_1 = 2$		

On suppose dans la suite du TD que les caractéristiques connues des deux joueurs sont identiques, à savoir qu'il est connaissance publique que θ_1 et θ_2 appartiennent aux deux distributions indépendantes suivantes :



- 3) Dire lorsque $c = 3$ sous quelle probabilité on devrait construire ce pont.

4) Ecrire le jeu Bayésien, en supposant que les deux joueurs ont accepté la participation au jeu, et en analysant toutes les stratégies possibles des différents types qui disent la vérité V, ou mentent M par exemple, les quatre lignes seraient 1v2v, 1v2m, 1m2v, 1m2m. Dans chaque case, vous indiquez le payoff net des agents, ce qu'ils gagnent moins ce qu'ils payent à l'issue du mécanisme. On complètera donc le tableau suivant qui indique le payoff de chaque type si le Pont est construit [Pour guider, on a rempli deux cellules, dans chaque case le Coin NW est le payoff du type 1 du joueur 1, le Coin NE, le payoff du type 1 du joueur 2 et le coin SW le payoff du type 2 du joueur 1 et le coin SE le payoff du type 2 du joueur 2.] :

	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12			
1v 2m				1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v				
1m 2m				

5) Résoudre le jeu Bayésien précédent. Notez les différentes propriétés que vous retenir de cet exemple : est-ce que la décision de produire est prise dans ce jeu ? L'équilibre est-il optimum ? On rappelle les inégalités suivantes qui peuvent vous aider :

$$-\frac{2}{3} \leq -\frac{7}{12} \leq -\frac{1}{2} \leq -\frac{5}{12} \leq -\frac{1}{3}$$

Le mécanisme de Clarkes et Groves On étudie dans le même contexte un mécanisme de Clarkes et Groves : On définit ainsi les deux fonctions de transfert :

$$q = 1 \text{ si } \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \geq c \text{ et alors, et uniquement alors} \quad \begin{aligned} t_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) &= \hat{\theta}_2 - c \\ t_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) &= \hat{\theta}_1 - c \end{aligned}$$

6) Montrer que révéler la vérité est une stratégie dominante.

7) Comparer les annonces des agents avec les deux mécanismes et conclure.

2.1 Jeu Bayésien

	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12	1-c/2 , 1-5c/12 2-2c/3 , 2-5c/12	1-c/3 , 1-7c/12 2-2c/3 , 2-7c/12	1-5c/12 , 1-7c/12 2-7c/12 , 2-5c/12
1v 2m	1-5c/12 , 1-c/2 2-5c/12 , 2-2c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-c/3 , 1-2c/3 2-c/3 , 2-2c/3	1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v	1-7c/12 , 1-c/3 2-7c/12 , 2-2c/3	1-2c/3 , 1-c/3 2-2c/3 , 2-c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-7c/12 , 1-c/2 2-7c/12 , 2-c/3
1m 2m	1-7c/12 , 1-5c/12 2-5c/12 , 2-7c/12	1-2c/3 , 1-5c/12 2-c/2 , 2-5c/12	1-c/2 , 1-7c/12 2-c/3 , 2-7c/12	1-7c/12 , 1-7c/12 2-5c/12 , 2-5c/12

2.2 Rationalité du type 1 du joueur 1

	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12	1-c/2 , 1-5c/12 2-2c/3 , 2-5c/12	1-c/3 , 1-7c/12 2-2c/3 , 2-7c/12	1-5c/12 , 1-7c/12 2-7c/12 , 2-5c/12
1v 2m	1-5c/12 , 1-c/2 2-5c/12 , 2-2c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-c/3 , 1-2c/3 2-c/3 , 2-2c/3	1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v	1-7c/12 , 1-c/3 2-7c/12 , 2-2c/3	1-2c/3 , 1-c/3 2-2c/3 , 2-c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-7c/12 , 1-c/2 2-7c/12 , 2-c/3
1m 2m	1-7c/12 , 1-5c/12 2-5c/12 , 2-7c/12	1-2c/3 , 1-5c/12 2-c/2 , 2-5c/12	1-c/2 , 1-7c/12 2-c/3 , 2-7c/12	1-7c/12 , 1-7c/12 2-5c/12 , 2-5c/12

2.3 Rationalité du type 2 du joueur 1

•	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12	1-c/2 , 1-5c/12 2-2c/3 , 2-5c/12	1-c/3 , 1-7c/12 2-2c/3 , 2-7c/12	1-5c/12 , 1-7c/12 2-7c/12 , 2-5c/12
1v 2m	1-5c/12 , 1-c/2 2-5c/12 , 2-2c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-c/3 , 1-2c/3 2-c/3 , 2-2c/3	1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v	1-7c/12 , 1-c/3 2-7c/12 , 2-2c/3	1-2c/3 , 1-c/3 2-2c/3 , 2-c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-7c/12 , 1-c/2 2-7c/12 , 2-c/3
1m 2m	1-7c/12 , 1-5c/12 2-5c/12 , 2-7c/12	1-2c/3 , 1-5c/12 2-c/2 , 2-5c/12	1-c/2 , 1-7c/12 2-c/3 , 2-7c/12	1-7c/12 , 1-7c/12 2-5c/12 , 2-5c/12

2.4 Rationalité du type 1 du joueur 2

•	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12	1-c/2 , 1-5c/12 2-2c/3 , 2-5c/12	1-c/3 , 1-7c/12 2-2c/3 , 2-7c/12	1-5c/12 , 1-7c/12 2-7c/12 , 2-5c/12
1v 2m	1-5c/12 , 1-c/2 2-5c/12 , 2-2c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-c/3 , 1-2c/3 2-c/3 , 2-2c/3	1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v	1-7c/12 , 1-c/3 2-7c/12 , 2-2c/3	1-2c/3 , 1-c/3 2-2c/3 , 2-c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-7c/12 , 1-c/2 2-7c/12 , 2-c/3
1m 2m	1-7c/12 , 1-5c/12 2-5c/12 , 2-7c/12	1-2c/3 , 1-5c/12 2-c/2 , 2-5c/12	1-c/2 , 1-7c/12 2-c/3 , 2-7c/12	1-7c/12 , 1-7c/12 2-5c/12 , 2-5c/12

2.5 Rationalité du type 2 du joueur 2

	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12	1-c/2 , 1-5c/12 2-2c/3 , 2-5c/12	1-c/3 , 1-7c/12 2-2c/3 , 2-7c/12	1-5c/12 , 1-7c/12 2-7c/12 , 2-5c/12
1v 2m	1-5c/12 , 1-c/2 2-5c/12 , 2-2c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-c/3 , 1-2c/3 2-c/3 , 2-2c/3	1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v	1-7c/12 , 1-c/3 2-7c/12 , 2-2c/3	1-2c/3 , 1-c/3 2-2c/3 , 2-c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-7c/12 , 1-c/2 2-7c/12 , 2-c/3
1m 2m	1-7c/12 , 1-5c/12 2-5c/12 , 2-7c/12	1-2c/3 , 1-5c/12 2-c/2 , 2-5c/12	1-c/2 , 1-7c/12 2-c/3 , 2-7c/12	1-7c/12 , 1-7c/12 2-5c/12 , 2-5c/12

2.6 Synthèse

	1V 2V	1V 2M	1M 2V	1M 2M
1v 2v	1-5c/12 , 1-5c/12 2-7c/12 , 2-7c/12	1-c/2 , 1-5c/12 2-2c/3 , 2-5c/12	1-c/3 , 1-7c/12 2-2c/3 , 2-7c/12	1-5c/12 , 1-7c/12 2-7c/12 , 2-5c/12
1v 2m	1-5c/12 , 1-c/2 2-5c/12 , 2-2c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-c/3 , 1-2c/3 2-c/3 , 2-2c/3	1-5c/12 , 1-2c/3 2-5c/12 , 2-c/2
1m 2v	1-7c/12 , 1-c/3 2-7c/12 , 2-2c/3	1-2c/3 , 1-c/3 2-2c/3 , 2-c/3	1-c/2 , 1-c/2 2-c/2 , 2-c/2	1-7c/12 , 1-c/2 2-7c/12 , 2-c/3
1m 2m	1-7c/12 , 1-5c/12 2-5c/12 , 2-7c/12	1-2c/3 , 1-5c/12 2-c/2 , 2-5c/12	1-c/2 , 1-7c/12 2-c/3 , 2-7c/12	1-7c/12 , 1-7c/12 2-5c/12 , 2-5c/12

Il en ressort que le seul équilibre Bayésien est lorsque les deux types 1 disent la vérité, être 1, et les deux types 2 mentent en disant qu'ils sont 1.

Moralité, dans ce jeu, tout le monde déclare qu'il est 1 et paye $c/2$.

Lorsque le coût est égal à 3, On décide alors de ne pas faire construire le Pont.