Université de TOURS - L1 Gestion
Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion
Enoncé du TD n° 6 - groupe 127
Dérivées, dérivées partielles, limites, fonctions concaves et/ou quasi-concaves
Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : la définition d'un ensemble convexe dans le plan, la caractérisation d'une fonction à une variable concave et d'une fonction à deux variables quasi-concave, la manipulation des équations, les généralités sur le calcul des limites, en particulier les indéterminations et leur résolution.

<table>
<tr>
<td>Un ensemble est convexe s'il contient tout segment liant n'importe lequel de deux de ses éléments. Autrement dit $X, Y \in E$ implique $\lambda X + (1-\lambda) Y \in E$.</td>
<td>Une fonction f concave ($f'' \leq 0$) vérifie les deux propriétés suivantes : - f est en dessous de chacune de ses tangentes - f est au-dessus de chacune de ses cordes : $\forall x, y$: $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, $\lambda \in [0,1]$</td>
<td>
<table>
<tr><td>$(+\infty) + (+\infty)$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) - (+\infty)$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) * (+\infty)$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) * (-\infty)$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\lambda * (+\infty), \lambda > 0$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\lambda * (+\infty), \lambda < 0$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$0^+ * (+\infty), \lambda > 0$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)/(+\infty)$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)/(0^-)$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
</table>
</td>
<td>Soit une fonction $f(x,y)$ définie sur un ensemble ouvert. On dit qu'elle est QUASI-CONCAVE si pour tout paramètre a, l'ensemble $\{g(x,y) \geq a\}$, cad l'ensemble des points (x,y) tel que l'image par la fonction g est supérieur à un seuil déterminé (noté a), est CONVEXE. Dans le cas particulier où $f_x > 0$ et où $f_y > 0$, la fonction est quasi-concave si ses courbes de niveau sont convexes, cad que le TMS f_x/f_y décroit le long d'une courbe de niveau.</td>
</tr>
</table>

1 Dérivées, dérivées partielles et courbes de niveau, quasi-concavité

Ceci est juste un exercice de calcul, pour vous entrainer à calculer des dérivées standard et des dérivées partielles.

1) Pour chacune des fonctions de 2 variables suivantes calculer les dérivées premières, secondes et croisée.

$$g(x,y) = x^2 y^3 \qquad g(y) = \sqrt{y} \qquad g(x,y) = x\sqrt{y} \qquad g(x,y) = x^{1/2} y^{1/3} \qquad g(x,y) = \sqrt{xy} \qquad g(x,y) = x^{1/2} y^{1/2}$$

2) Pour chacune des fonctions précédentes, dire si les courbes de niveau d'équation $g(x,y) = \alpha$ sont toujours décroissantes, toujours croissantes, parfois croissantes et décroissantes.

3) soit la fonction $g(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ dire si les courbes de niveau, quand on considère cette fonction uniquement pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont croissantes ou décroissantes.

4) Reprenez les fonctions de la question 1 et étudier si elles sont ou non quasi-concaves. [définition dans le résumé.]

2 Corrélations, dérivées et dérivées partielles

1) Soit deux variables x et y qui sont corrélées, et plus précisément liées par une relation du type $f(x,y) = 0$. *On supposera qu'on s'intéresse au cas où x et y sont tous nes deux des nombres positifs ou nuls.* Dire, dans les applications ci-après s'il y a une corrélation positive ou négative entre x et y. Utiliser des arguments simples et intuitifs. En déduire la croissance ou la décroissante de la de l'équation représentée dans un espace x, y.

$$x^2 + y - 1 = 0 \qquad xy - 1 = 0 \qquad x + yx - 1 = 0 \qquad (x-1)(y+1) - 3 = 0$$

On supposera dans le dernier cas que $x \geq 1$.

2) On considère les 4 fonctions suivantes de x et y ; pour ces 4 fonctions, calculer leurs *dérivées partielles* par rapport à x et y, et vérifier qu'elles ont bien le même signe. Auriez-vous pu, sans les calculer, trouver que ces dérivées partielles ont le même signe, dans chacun des cas ?

$$f = x^2 + y - 1 \qquad g = xy - 1 \qquad u = x + yx - 1 \qquad v = (x-1)(y+1) - 3$$

3) La fonction de coût d'une firme est $C(q) = 3q^2 + q + 1$. Quelle est la dérivée de la fonction de coût autour de q ? Peut-on dire que les couts marginaux sont croissants ? Peut-on dire que le coût unitaire est toujours plus élevé que 1 ?

4) Donner un exemple de fonction de coût dont le coût marginal est positif et croissant, mais toujours compris entre 0 et 1

3 QCM Radio de la brève sur les dérivées

Lire la brève sur les dérivées (lien : https://utbox.univ-tours.fr/s/tpYFtRpsLBNjDE4) et réaliser le QCM en dernière page, jusqu'à temps que vous ayez fourni toutes les bonnes réponses et, seulement les bonnes réponses. On téléchargera le fichier pour l'ouvrir avec l'application gratuite Acrobat Reader pour que les boutons radio fonctionnent.

4 Limites

1) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis, s'il y a lieu, interpréter les résultats obtenus en terme d'asymptotes. On prendra soin, quand cette limite se présente comme une indétermination, d'expliquer comment vous levez l'indétermination.

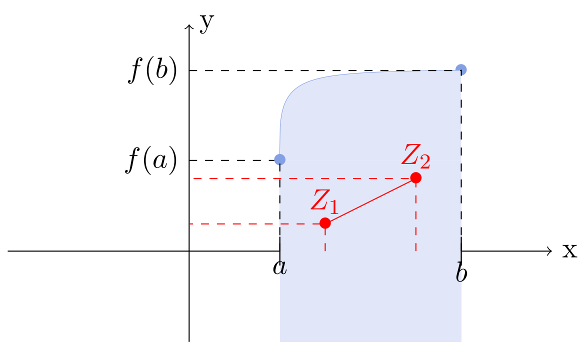
$$-5x^3 + 3x^2 - 8x + 2 \qquad \frac{4x^3 - 2}{x - 5} \qquad \frac{3x - 1}{x - 2}$$

2) Appliquer la règle de l'Hopital pour lever l'indétermination des limites suivantes, quand $x \to 0$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \frac{x}{\ln(1+x)} \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - 1} \qquad x\ln(x)$$

5 Ensembles convexes

1) Soit une fonction $x \to f(x)$ concave définie sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que l'ensemble $\{(x, y)/y \leq f(x)\}$ est convexe.



2) Montrer, par tout argument que vous jugerez adéquat que les ensembles suivants du Plan sont convexes

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad x^{-3} + y^4 \leq 1(\ pour x \in [1, 3])$$

On appelle Ensemble de production, dans le cas d'une firme qui produit un bien manufacturé à partir d'un intput l'ensemble des points $\{(x, y)\}$ tels que la quantité y (ou inférieure) de bien manufacturé qui peut être produite à partir d'une quantité x d'input. On appelle fonction de production $f(x)$ le maximum de bien manufacturé produit à partir de la quantité x d'input

3) Montrer que dans le cas d'une firme avec un input et un output, si l'ensemble des plans de production est convexe, alors la fonction de production est concave et vice versa. On prendra soin de faire une démonstration par un graphique commenté, et, si nécessaire une démonstration plus formelle.

4) Lorsque vous avez un plan de production convexe, est-ce que si vous pouvez produire y à partir de x, vous est-il en général possible de produire $2y$ à partir de $2x$?

5) interpréter la question 3) à la lumière de la questions précédente. Pourquoi est-on interressé à avoir un ensemble de production convexe.

FIN du sujet du TD n° 6 - groupe 127