Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Enoncé du TD n° 7 - groupe 127

Approximation linéaires et quadratique d'une fonction, différentielle d'une fonction

Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : la partie approximation d'une fonction d'une et de deux variables du chapitre 4.

Soit une fonction f d'une variable définie sur un ouvert autour de x, son approximation linéaire autour de x s'écrit : $f(x+dx) \approx f(x) + f_x dx,$ où l'on note parfois $df = f_x dx$ la partie approximée de la fonction f, qu'on appelle « la différentielle de f » (plus précisément la *différentielle d'ordre 1 de f*).	Soit une fonction f d'une variable définie sur un ouvert autour de x, son approximation quadratique autour de x s'écrit : $f(x+dx) \approx f(x) + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2,$ où l'on note $df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}(dx)^2$ la partie approximée de la fonction f, qu'on appelle « la différentielle de f » (plus précisément la *différentielle d'ordre 2 de f*).	L'approximation d'une fonction peut se faire avec des degrés de précision différents : Principe de l'approximation $f(x+dx) = f(x) + df$ Approximation linéaire $f(x+dx) = f(x) + f_x dx$ f est approximée par sa tengente Approximation quadratique $f(x+dx) = f(x) + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}(dx)^2$ f est approximée par une parabole	L'approximation d'une fonction de 2 variables utilise les mêmes techniques, en définissant la précision et suivant un principe spécifique **Principe** : Pour une fonction de deux variables (ou plus), on *additionne* les effets de variation de chacune des variables : Soit une fonction f définie sur un ouvert autour de x et de y, son approximation linéaire autour de x et de y s'écrit : $f(x+dx, y+dy) \approx f(x) + f_x dx + f_y dy,$ où l'on note $df = f_x dx + f_y dy$ la différentielle d'ordre 1 de f.

Dans tous les problèmes d'approximation de fonction abordés, après le choix de la méthode d'approximation, on devra généralement préciser avec quelle approximation décimale le résultat numérique sera présenté.

1 Approximations décimales de nombres

Les 38 premières décimales du nombre π sont les suivantes : $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419$.

1) Définir et donner dans un premier temps une approximation de π à 10^{-1} près puis, dans un second temps, à 10^{-11} près. Soyez très précis dans vos réponses, dans la définition de cette approximation.

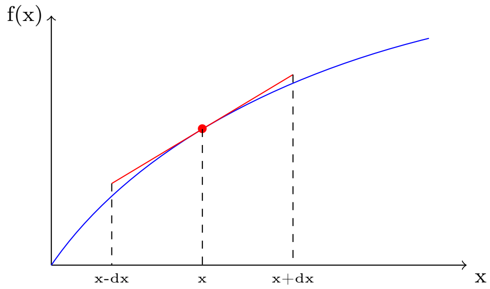
2) Soit une fonction f qui. Vérifie en particulier $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \pi$. Définir que qui serait une approximation linéaire de $f(2,516)$ à 10^{-2} près, puis en donner une valeur.

3) Soit une fonction g qui. Vérifie en particulier $g(0) = 0$ et $g(1) = \pi$. Définir que qui serait une approximation linéaire de $g(1/2)$ à 10^{-2} près, puis en donner une valeur.

2 Approximation d'une fonction concave

Le but de cet exercice est de comprendre numériquement, dans le cas d'une fonction f concave, que l'approximation de f par $f + df = f + f_x dx$ est supérieure à f.

1) Commenter à partir du graphique suivant qui représente une fonction concave, pourquoi la valeur retenue par l'approximation linéaire d'une fonction concave est supérieure à la valeur de la fonction.



2) Calculer df en fonction de dx quand $x = 0$ pour

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

On part du principe que l'approximation quadratique est toujours comprise entre l'approximation linéaire et la vraie valeur de la fonction. Pour se représenter numériquement que l'approximation de f est bien au-dessus de f, On propose d'établir dans les cas précédents l'approximation quadratique de f, qui nous fournit une approximation de $f - f_x dx$, et dont on vérifiera qu'elle est négative, ce qui revient à dire qu'elle est plus petite que l'approximation linéaire.

3) Calculer l'approximation quadratique de f en fonction de dx et de $(dx)^2$ quand $x = 0$ pour

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

4) Vérifier dans chacun des cas précédents que f est concave, et que l'approximation linéaire de f est supérieure à f.

3 Approximations quadratiques d'une fonction de coût

Soit une entreprise qui produit une quantité $q = 1$ et dont la fonction de coût est : $C = 1 + q^2 \ln(q)$. Donner une approximation quadratique de la fonction de coût autour de $q = 1$. On calculera donc les coefficients α et β qui apparaissent dans la formule suivante :

$$C(1 + dq) = C(1) + \alpha dq + \beta(dq)^2$$

4 Approximations linéaire d'une fonction de deux variables

1) Soit la fonction de deux variables $f(x, y) = 1 + xy$. Calculer les deux dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y de la fonction puis donner une approximation linéaire de $f(1 + dx, 1 + dy)$ quand dx, dy est petit.
2) En prolongement de la question précédente, donner la valeur approximée de f(1.02, 1.13) à 10^{-2} près. Comparer avec la vraie valeur.

5 Variations infinitésimales de deux variables corrélées

Considérons une fonction f définie sur deux variables et dérivable. Soient deux variables x_1 et x_2 corrélées, vérifiant plus précisément la relation $f(x_1, x_2) = 0$. On suppose plus précisément qu'étant donné $x_1 \in \mathbb{R}_+$, il existe au plus une valeur de $x_2 \in \mathbb{R}_+$, telle que $f(x_1, x_2) = 0$.
On rappelle que la différentielle de f calcule les variations infinitésimales de f quand x_1 et x_2 varient

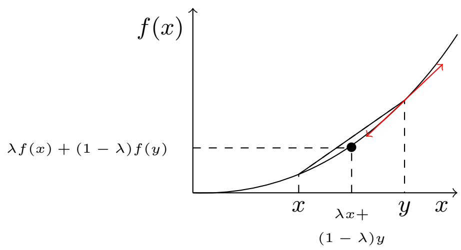
$$df = f_{x1}dx1 + f_{x2}dx2,$$

Ou f_{x1} désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_1 et f_{x2}, la dérivée partielle de f par rapport à x_2.

1) Expliquer et montrer que la relation entre les deux variables x_1 et x_2, s'approxime autour de (x_1, x_2) par une relation linéaire entre $dx1$ et $dx2$.
2) Trouver la pente de la relation précédente. Expliquer en quoi cette pente établit localement une échelle de valeur entre la variable x_1 et la variable x_2.

6 Convexité

Justifier que la fonction dont la représentation est ci-après est convexe :



7 Limites

Donner si elles existent la limite quand $x \to 0^+$ des fonctions suivantes (3e cas difficile)

$$x/\ln(1 + x) \qquad \ln(1 + x)/x \qquad x\ln(x)$$

8 Elasticité de la demande de marché et opportunités du monopole

Considérons un monopole qui produit et vend un bien, dont la fonction de coût est $C(q)$ convexe, anticipant qu'il ne pourra pas vendre plus de bien au prix p que ne le demande le marché, soit la qté $q = D(p)$. On supposera que D est l'inverse d'une fonction affine $D = 1/(\alpha p + \beta)$ avec α et β positifs.
1) Ecrire la fonction de profit $p \to \pi(q)$ en fonction de $C(q)$ et de $D(p)$ (en substituant q par $D(p)$).
2) Montrer, en calculant sa dérivée seconde, que la fonction $pD(p)$ est concave. Montrer que $D(p)$ est convexe, en déduire que $-C(D(p))$ concave. Conclure que la fonction profit $\pi(p)$ est concave.
3) Montrer que le prix p qui annule la fonction dérivée $\pi'(p)$ vérifie l'équation

$$\frac{p - C_m}{p} = -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \text{(M)}$$

Où $C_m = c'(q)$ et ε est l'élasticité de la demande par rapport au prix.
4) Déduire de (M) ce qui se passe quand ε est très petit puis quand $|\varepsilon|$ est très grand : interpréter le choix du monopole en se souvenant qu'une firme en Concurrence pure et parfaite tarifie au coût marginal.

Fin du sujet du TD n° 7 - groupe 127