Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion

Corrigé du TD n° 7

Approximation linéaires et quadratique d'une fonction, différentielle d'une fonction

Automne 2021

Les savoirs à revoir pour ce TD : la partie approximation d'une fonction d'une et de deux variables du chapitre 4.

Soit une fonction f d'une variable définie sur un ouvert autour de x, son approximation linéaire autour de x s'écrit : $$f(x+dx) \approx f(x) + f_x dx,$$ où l'on note parfois $df = f_x dx$ la partie approximée de la fonction f, qu'on appelle « la différentielle de f » (plus précisément la *différentielle d'ordre 1 de* f).	Soit une fonction f d'une variable définie sur un ouvert autour de x, son approximation quadratique autour de x s'écrit : $$f(x+dx) \approx f(x) + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}(dx)^2,$$ où l'on note $df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}(dx)^2$ la partie approximée de la fonction f, qu'on appelle « la différentielle de f » (plus précisément la *différentielle d'ordre 2 de* f).	L'approximation d'une fonction peut se faire avec des degrés de précision différents : Principe de l'approximation $f(x+dx) = f(x) + df$ Approximation linéaire $f(x+dx) = f(x) + f_x dx$ f est approximée par sa tengente Approximation quadratique $f(x+dx) = f(x) + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}(dx)^2$ f est approximée par une parabole	L'approximation d'une fonction de 2 variables utilise les mêmes techniques, en définissant la précision et suivant un principe spécifique **Principe** : Pour une fonction de deux variables (ou plus), on *additionne* les effets de variation de chacune des variables : Soit une fonction f définie sur un ouvert autour de x et de y, son approximation linéaire autour de x et de y s'écrit : $$f(x+dx, y+dy) \approx f(x) + f_x dx + f_y dy,$$ où l'on note $df = f_x dx + f_y dy$ la différentielle d'ordre 1 de f.

Dans tous les problèmes d'approximation de fonction abordés, après le choix de la méthode d'approximation, on devra généralement préciser avec quelle approximation décimale le résultat numérique sera présenté.

1 Approximations décimales de nombres

Les 38 premières décimales du nombre π sont les suivantes : $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419$.

Pour cet exercice, on a besoin de connaître les premières décimales de π. On trouve dans l'énoncé : $\pi = 3,14159265358979323846264338327950$

1) Définir et donner dans un premier temps une approximation de π à 10^{-1} près puis, dans un second temps, à 10^{-11} près. Soyez très précis dans vos réponses, dans la définition de cette approximation.

Une approximation à 10^{-1} près, indique que l'on doit prendre un chiffre après la virgule, mais en arrondissant au 1/10 inférieur si le Nombre est plus proche du 1/10 inférieur, ou au 1/10 supérieur si le Nombre est plus proche du 1/10 supérieur. Ainsi, l'approximation à 10^{-1} près, de $1,23$ est $1,2$ tandis que l'approximation à 10^{-1} près, de $1,27$ est $1,3$. Pour π dont les deux premières décimales sont 14, l'approximation à 10^{-1} près est $\pi \approx 3,1$.

Pour connaître l'approximation à 10^{-11} près, en suivant la même rigoureuse logique, il faut connaître les douze premières décimales de π, soit 141592653589. On en déduit que cette approximation ne se finit pas par 8, mais par 9 : on a alors $\pi \approx 3,14159265359$.

2) Soit une fonction f qui. Vérifie en particulier $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \pi$. Définir que qui serait une approximation linéaire de $f(2,516)$ à 10^{-2} près, puis en donner une valeur.

Donner une approximation linéaire. Entre. Deux points d'une courbe, c'est considérer la corde entre ces deux points, et donner la valeur du point correspondant sur la corde

La corde qui passe par les points $(0,0)$ et (π,π) n'est autre que la première bissectrice, cad le lieu des points pour lesquels la seconde coordonnée égale. La première coordonnée. Ainsi si la première coordonnée est 2,516, la valeur sur la corde sera aussi $2,516$. Si par ailleurs on. Approxime cette valeur à 10^{-2} près, on dira que $f(2,516) \approx 2,52$, à 10^{-2} près.

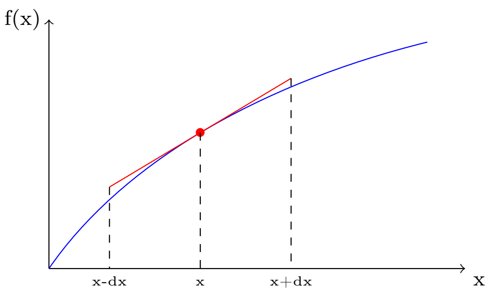
3) Soit une fonction g qui. Vérifie en particulier $g(0) = 0$ et $g(1) = \pi$. Définir que qui serait une approximation linéaire de $g(1/2)$ à 10^{-2} près, puis en donner une valeur.

On trouve une approximation de $g(1/2)$ en cherchant le milieu des points $(0,0)$ et $(1,\pi)$. C'est donc $(1/2, \pi/2)$. On approxime donc $g(1/2)$ par $\pi/2$. Puisqu'on demande le résultat à à 10^{-2} près, il faut déjà connaître les trois premières décimales de $\pi/2 = 1,5705...$, donc à 10^{-2} près, cela donne $g(1/2) \approx 1,57$.

2 Approximation d'une fonction concave

Le but de cet exercice est de comprendre numériquement, dans le cas d'une fonction f concave, que l'approximation de f par $f + df = f + f_x dx$ est supérieure à f.

1) Commenter à partir du graphique suivant qui représente une fonction concave, pourquoi la valeur retenue par l'approximation linéaire d'une fonction concave est supérieure à la valeur de la fonction.



La fonction f est en bleu, la tangente au point x, en rouge, est au-dessus de la courbe, ce qui est une caractéristique des fonctions concaves. L'approximation linéaire consiste à prendre en $x + dx$ et en $x - dx$ la valeur atteinte par la droite rouge. Cette droite étant au-dessus de f, la valeur approximée de $f(x)$ est SUPÉRIEURE à la vraie valeur de $f(x)$.

2) Calculer df en fonction de dx quand $x = 0$ pour

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

Le cours indique que $df = f_x dx$, où f_x désigne la dérivée de f en zéro, que l'on note $f'(0)$.

- Pour la fonction $f = \ln(1+x)$, $f_x = 1/(1+x)$, $f'(0) = 1$, $df = dx$.

- Pour la fonction $f = \sqrt{x}$, $f_x = 1/(2\sqrt{x+1})$, $f'(0) = 1/2$, $df = dx/2$.

- Pour la fonction $f = 1 - \frac{1}{1+x}$, $f_x = 1 + \frac{1}{(1+x)^2}$, $f'(0) = 1$, $df = dx$.

- Pour la fonction $f = 1 - x^2$, $f_x = -2x$, $f'(0) = 0$, $df = 0$, ce qu'il n'est pas très correct d'écrire. Il faut à ce stade passer à l'approximation quadratique

On part du principe que l'approximation quadratique est toujours comprise entre l'approximation linéaire et la vraie valeur de la fonction. Pour se représenter numériquement que l'approximation de f est bien au-dessus de f, On propose d'établir dans les cas précédents l'approximation quadratique de f, qui nous fournit une approximation de $f - f_x dx$, et dont on vérifiera qu'elle est négative, ce qui revient à dire qu'elle est plus petite que l'approximation linéaire.

3) Calculer l'approximation quadratique de f en fonction de dx et de $(dx)^2$ quand $x = 0$ pour

$$f = \ln(1+x) \quad f = \sqrt{x+1} \quad f = 1 - \frac{1}{1+x} \quad f = 1 - x^2$$

Le cours indique que $df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}(dx)^2$, où f_{xx} désigne la dérivée. seconde de f en zéro, que l'on note encore $f''(0)$.

- Pour la fonction $f = \ln(1+x)$, $f_x = 1/(1+x)$, $f_{xx} = -1/(1+x)^2$, $f''(0) = -1$, $df = dx - \frac{1}{2}(dx)^2$.

- Pour la fonction $f = \sqrt{x}$, $f_x = 1/(2\sqrt{x+1}) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$, $f_{xx} == \frac{-1}{4}(x+1)^{-3/2}$, $f'(0) = -1/4$, $df = dx/2 - \frac{1}{8}(dx)^2$.

- Pour la fonction $f = 1 - \frac{1}{1+x}$, $f_x = +\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$, $f_{xx} = -2(1+x)^{-3}$, $f''(0) = -2$, $df = dx - (dx)^2$.

- Pour la fonction $f = 1 - x^2$, $f_x = -2x$, $f_{xx} = -2$, $f'(0) = -2$, $df = -(dx)^2$, ce qui est maintenant une écriture acceptable .

4) Vérifier dans chacun des cas précédents que f est concave, et que l'approximation linéaire de f est supérieure à f.

Si on reprend les calculs précédents, on vérifie que $f'' < 0$ dans chacun des cas.

Par ailleurs, si on soustrait à f son approximation linéaire, il ne reste plus que le terme $\frac{1}{2}f''(0)(dx)^2 < 0$, puisque la fonction est concave : donc l'approximation linéaire est plus grande que. f.

3 Approximations quadratiques d'une fonction de coût

Soit une entreprise qui produit une quantité $q = 1$ et dont la fonction de coût est : $C = 1 + q^2 \ln(q)$. Donner une approximation quadratique de la fonction de coût autour de $q = 1$. On calculera donc les coefficients α et β qui apparaissent dans la formule suivante :

$$C(1 + dq) = C(1) + \alpha dq + \beta(dq)^2$$

Il faut calculer $C(1)$, $C'(1)$ et $C''(1)$ et on aura l'approximation quadratique $C(1+dq) = C(1) + C'(1)dq + \frac{1}{2}C''(1)(dq)^2$. Ici $C = 1 + q^2 \ln(q)$, donc $C' = 2q\ln(q) + q^2/q = 2q\ln(q) + q$, et $c'' = 2\ln(q) + 2q/q + 1 = 2\ln(q) + 3$, en 1, on. Trouve $C(1) = 1 + 0 = 1$, $C'(1) = 0 + 1 = 1$ et $C''(1) = 0 + 3 = 3$. Ainsi,

$$C(1 + dq) = 1 + dq + \frac{3}{2}(dq)^2 \qquad \alpha = 1 \ \beta = 3/2$$

4 Approximations linéaire d'une fonction de deux variables

1) Soit la fonction de deux variables $f(x, y) = 1 + xy$. Calculer les deux dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y de la fonction puis donner une approximation linéaire de $f(1 + dx, 1 + dy)$ quand dx, dy est petit.

On a

$$f_x = y \qquad f_y = x$$

Par ailleurs $f(1,1) = 1 + 1 * 1 = 2$. Il s'ensuite L'approximation linéaire de f autour de (1,1) est :

$$f(1 + dx, 1 + dy) \approx 2 + dx + dy$$

2) En prolongement de la question précédente, donner la valeur approximée de f(1.02, 1.13) à 10^{-2} près. Comparer avec la vraie valeur.

L'application numérique :

$$f(1.02, 1.13) \approx 2 + 0,13 + 0,02 = 1,15$$

La vraie valeur est $1 + (1,02 * 1,13) = 1 + 1,1526 = 2,1526$. On voit qu'à 10^{-2} près, la valeur approximée donne un bon résultat.

5 Variations infinitésimales de deux variables corrélées

Considérons une fonction f définie sur deux variables et dérivable. Soient deux variables x_1 et x_2 corrélées, vérifiant plus précisément la relation $f(x_1, x_2) = 0$. On suppose plus précisément qu'étant donné $x_1 \in \mathbb{R}_+$, il existe au plus une valeur de $x_2 \in \mathbb{R}_+$, telle que $f(x_1, x_2) = 0$.
On rappelle que la différentielle de f calcule les variations infinitésimales de f quand x_1 et x_2 varient

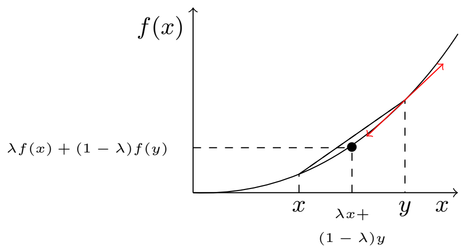
$$df = f_{x1} dx1 + f_{x2} dx2,$$

Ou f_{x1} désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_1 et f_{x2}, la dérivée partielle de f par rapport à x_2.

1) Expliquer et montrer que la relation entre les deux variables x_1 et x_2, s'approxime autour de (x_1, x_2) par une relation linéaire entre $dx1$ et $dx2$.
Par définition les deux variables x_1 et x_2, sont telles que $f(x_1, x_2) = 0$. Si on se situe en un point ou cette relation est vérifiée, et qu'on regarde les faibles variations de x_1 et x_2 autour, $x_1 + dx_1$ et $x_2 + dx_2$ telles que la relation est toujours vérifiée, on a : $f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) = 0$ ce qui conduit, en différentiant à $df = 0$ à l'équation $f_{x1} dx1 + f_{x2} dx2 = 0$ ce qui établit formellement une relation linéaire entredx_1 et dx_2. CQFD. Interprétation, pour que la relation $f(x_1, x_2) = 0$ continue à être vérifiée autour de x_1 et x_2, il faut qu'il y ait un certain rapport de proportionalité entre x_1 et x_2.
2) Trouver la pente de la relation précédente. Expliquer en quoi cette pente établit localement une échelle de valeur entre la variable x_1 et la variable x_2.
le rapport de proportionalité entre x_1 et x_2 établie par l'égalité $f_{x1} dx1 + f_{x2} dx2 = 0$ est égal à f_{x1}/f_{x2} : dit autrement, les variations autour de x_1 et x_2 doivent être choisies telles que la valeur relative de x_1 soit f_{x1}/f_{x2}. Autre interprétation, f_{x1}/f_{x2} est la pente de la tengente de la courbe $f = 0$ en (x_1, x_2).

6 Convexité

Justifier que la fonction dont la représentation est ci-après est convexe :



La fonction est. en. Dessous de ses cordes. On voit en effet clairement :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On voit par ailleurs que f est au-dessus de ses tangentes.

7 Limites

Donner si elles existent la limite quand $x \to 0^+$ des fonctions suivantes (3e cas difficile)

$$x/\ln(1+x) \qquad \ln(1+x)/x \qquad x\ln(x)$$

- Soit la fonction $x/\ln(1+x)$, elle se présente comme une fraction f/g dont le numérateur $f = x$ et le dénominateur $g = \ln(1+x)$ tendent vers 0. Pour que la. Règle de l'hopital fonctionne il faut que la dérivée du dénominateur ne soit pas nulle. Ici $f' = 1$, $g' = 1/1+x$, $g'(0) = 1$: la règle de l'Hopital s'applique la limite est $1/1 = 1$.
- Soit la fonction $\ln(1+x)/x$, elle se présente comme une fraction g/f dont le dénominateur $f = x$ et le numérateur $g = \ln(1+x)$ tendent vers 0. Pour que la. Règle de l'hopital fonctionne il faut que la dérivée du dénominateur ne soit pas nulle. Ici $f' = 1$, $g' = 1/1+x$, $g'(0) = 1$: la règle de l'Hopital s'applique la limite est $1/1 = 1$.
-Soit la fonction $x\ln(x)$. C'est d'abord, on peut le noter une limite classique en 0 : elle est a priori indéterminée puisque de la forme $0 * -\infty$. Mais on se souvient que c'est le x qui l'emporte. On peut tenter d'utiliser la règle de l'hopital en écrivant la fonction sous la forme : $x/(1/\ln(x))$. La limite a bien alors cette forme indéterminée f/g avec $f = x \to 0$ et $g = 1/\ln(x) \to 0$. La dérivée de f est 1, la dérivé de g : $g' = \dfrac{-1/x}{(\ln(x))^2}$. çà ne marche pas. On reprend dans la suite
La fonction $h = x\ln(x)$ a pour dérivée $h' = \ln(x) + x/x = 1 + \ln(x)$ ainsi pour $x < 1/e$ cette dérivée est négative, montrant qu'en zéro, la fonction ne peut pas tendre vers $-\infty$. C'est déjà un premier résultat. Ensuite, on sait que pour $x < 1$, $h < 0$, donc la limite est dans $\mathbb{R}_-$. Or $h(x^2) = xh(x)$. Cette propriété est incompatible avec une limite de h qui serait strictement négative, égale par exemple à $-a$. On trouverait alors $a \approx xa0$, ce qui est impossible quadn $x \to 0$. Donc la limite est 0

8 Elasticité de la demande de marché et opportunités du monopole

Considérons un monopole qui produit et vend un bien, dont la fonction de coût est $C(q)$ convexe, anticipant qu'il ne pourra pas vendre plus de bien au prix p que ne le demande le marché, soit la qté $q = D(p)$. On supposera que D est l'inverse d'une fonction affine $D = 1/(\alpha p + \beta)$ avec α et β positifs.

1) Ecrire la fonction de profit $p \to \pi(q)$ en fonction de $C(q)$ et de $D(p)$ (en substituant q par $D(p)$).

$\pi(p) = pD(p) - C(D(p))$

2) Montrer, en calculant sa dérivée seconde, que la fonction $pD(p)$ est concave. Montrer que $D(p)$ est convexe, en déduire que $-C(D(p))$ concave. Conclure que la fonction profit $\pi(p)$ est concave.

- La fonction $f = pD(p) = p/(\alpha p + \beta) = \dfrac{p + \beta/\alpha - \beta/\alpha}{\alpha p + \beta} = 1/\alpha - \dfrac{\beta/\alpha}{\alpha p + \beta}$ a pour dérifée $f' = \dfrac{\beta}{(\alpha p + \beta)^2}$ et pour dérivée seconde $f'' = \dfrac{-2\alpha\beta/\alpha}{(\alpha p + \beta)^3} < 0$: elle est concave quand $\alpha, \beta > 0$.

- La fonction $D = 1/(\alpha p + \beta)$ a pour dérivée première $-\alpha/(\alpha p + \beta)^2$ et pour dérivée seconde : $2\alpha^2/(\alpha p + \beta)^3 > 0$: elle est convexe.

- On utilise alors le résultat sur la composition de fonctions convexes qui demeure une fonction convexe : $C(D(p))$ est convexe car à la fois C et D sont convexes. On en déduit que l'opposée $-C(D(p))$ est concave.

- La fonction profit est la somme de deux fonctions $pD(p)$ et $-C(D(p))$ qui, toutes les deux sont concaves : la fonction profit est donc concave.

3) Montrer que le prix p qui annule la fonction dérivée $\pi'(p)$ vérifie l'équation

$$\frac{p - C_m}{p} = -\frac{1}{\varepsilon}, \tag{M}$$

Où $C_m = c'(q)$ et ε est l'élasticité de la demande par rapport au prix.

La dérivée de la fonction profit est $\pi'(p) = D(p) + pD'(p) - C'(D(p)) * D'(p)$. Elle s'annulle quand $D(p) + D'(p)(p - C_m) = 0$ (On a écrit le terme $C'(D(p))$ sous la forme C_m cad le coût marginal de la firme). Ce que l'on peut encore écrire sous une forme proposée par l'énoncé :

$$-\frac{D(p)}{pD'(p} = \frac{p - C_m}{p}$$

On reconnaît dans le terme de gauche l'opposé de l'élasticité de la demande par rapport au prix. En effet, $\varepsilon = \dfrac{p}{q}q'(p) = \dfrac{pD'(p)}{D(p)}$.

Remarque $\varepsilon < 0$ et donc on en déduit qu'au monopole $p > c_m$, ce qui est une caractéristique du monopole. Le monopole produit un bien qu'il vend plus cher que son coût marginal. Contrairement à la firme en concurrence pure et parfaite qui vend le bien au prix de la dernière unité produite.

4) Déduire de (M) ce qui se passe quand ε est très petit puis quand $|\varepsilon|$ est très grand : interpréter le choix du monopole en se souvenant qu'une firme en Concurrence pure et parfaite tarifie au coût marginal.

Quand ε est très petit (en valeur absolue) le terme $p - C_m$ est très grand, et le monopole propose vraiment un prix très supérieur au coût marginal. La situation pour le monopole est facilitée par le fait que l'élasticité de la demande est très faible, et donc que s'il augmente les prix, la demande ne faiblira pas beaucoup. Il peut donc augmenter très sensiblemnet ses profits en augmentant le prix, au-delà du cout marginal.

Quand ε est très grand (en valeur absolue) le terme $p - C_m$ est très petit, et le monopole propose un prix qui n'est pas vraiment supérieur au coût marginal. La situation pour le monopole est difficile par le fait que l'élasticité de la demande est très forte, et donc que s'il augmente les prix, la demande chutera dans des proportions telles que son profit pourrait être écorné. Le monopole doit donc être très prudent quand il augmente les prix, et en tout état de cause, en ne considérant que des augmentations faibles au-delà du cout marginal.

Fin du corrigé du TD 7