Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 7

Optimisation avec contrainte : l'examen des conditions secondes

Automne 2021

On suppose acquis la recherche des points stationnaires du programme $\max_{x,y} \ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ *lorsque la contrainte est saturée. Ce TD permet d'étudier sérieusement les conditions selon lesquelles on pouua conclure que le/les points stationnaires calculés sont ou non les solutions du programme d'optimisation.*

Critère f et g, fonctions concaves Etant donné (x,y) un point stationnaire du programme $\max_{x,y} \ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ qui sature la contrainte $(g(x,y) > 0)$, alors si f et g sont concaves, c'est une solution du programme. Plus précisément, étant donné f et g *concaves*, alors, (x^*,y^*) intérieur au domaine maximise $f(x,y)$ s.c. $g(x,y) \geq 0$ si et seulement si (x^*,y^*) est stationnaire.	**Critère f fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe** Etant donné (x,y) un point stationnaire du programme $\max_{x,y} \ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ qui sature la contrainte $(g(x,y) > 0)$, alors si f est quasiconcave et si l'ensemble $\{g(x,y) \geq 0\}$ est convexe, c'est une solution du programme. Plus précisément, étant donné f *quasiconcave*, si l'ensemble $g(x,y) \geq 0$ est convexe, alors (x^*,y^*) intérieur au domaine maximise $f(x,y)$ s.c. $g(x,y) = 0$ si et seulement si (x^*,y^*) est stationnaire.	**Critère f et g fonctions quasi-concaves et existence d'un hyperplan qui sépare f et g** Etant donné deux fonctions f et g quasi-concaves, on dit que (x^*,y^*) maximise $f(x,y)$ s.c. $g(x,y) \geq 0$ si et seulement si il existe un vecteur (p_x,p_y) tels que (x^*,y^*) maximise $p_x x + p_y y$ sous la contrainte $g(x,y) \geq 0$ (x^*,y^*) minimise $p_x x + p_y y$ sous la contrainte $f(x,y) \geq f(x^*,y^*)$ **Autres critères** Dans tous les autres cas, on doit raisonner « à la main » pour comprendre pourquoi la solution des FOCS est bien ou non la solution du programme étudié.
Une fonction f est concave si ses deux dérivées secondes sont négatives et si le déterminant de la matrice Hessienne est positif ou nul. Formellement $f_{11} \leq 0 \quad f_{22} \leq 0 \quad$ et $\quad f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 \geq 0$	Une fonction f est quasi-concave si les ensembles de points tels que f conduise à une valeur supérieur à un certain seuil, type $f \geq \alpha$ soit convexe. Un jeu de conditions suffisantes pour avoir une fonction quasi-concave quand $f_1 \geq 0$ et $f_2 \geq 0$ est $f_{11} \leq 0 \quad f_{22} \leq 0 \quad$ et $\quad f_{12} \geq 0$	Un ensemble $g \geq 0$ est convexe dès lors que si l'on prend deux points vérifiant $g \geq 0$ alors tous les points du segments entre ces deux points vérifient la même propriété $g \geq 0$. Formellement, $\big(g(x) \geq 0, g(y) \geq 0\big) \Rightarrow g(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq 0 \qquad [\forall \lambda \in [0,1]]$

1 Un même programme, formulé différemment, qui a les mêmes solutions

On considère les programmes suivants, apparemment différents, mais dont on montre qu'ils conduisent aux mêmes solutions, avec des méthodes qui pourraient être différentes

$$A = Max_{x_1,x_2>0} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad s.c. \quad (12 - 2x_1 - 3x_2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$B = Max_{x_1,x_2>0} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad s.c. \quad 12 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0$$

$$C = Max_{x_1,x_2>0} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad s.c. \quad (12 - 2x_1 - 3x_2)^2 \geq 0$$

1) Montrer que les trois programmes sont identiques et en déduire que les solutions recherchées sont les mêmes.

Seule la contrainte change. Mais on remarque qu'il y a équivalence entre les contraintes de ces trois programmes. En effet, il est immédiat que la première et la troisième contrainte sont des transformations monotones de la seconde contrainte, et qu'elles définissent le même ensemble $g \geq 0$, un triangle délimité par les axes horizontaux et verticaux, et par la droite d'équation $2x_1 + 3x_2 = 0$:

$$(12 - 2x_1 - 3x_2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \Longleftrightarrow 12 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \Longleftrightarrow (12 - 2x_1 - 3x_2)^2 \geq 0$$

Les variables étant les mêmes, l'objectif recherché étant identique, la contrainte à satisfaire étant identique (même formulée différemment), les programmes sont identiques et conduisent aux mêmes solutions.

2) Montrer que la contrainte de ces programmes est saturée et que ces programmes ont les mêmes points stationnaires.

La contrainte désigne un ensemble borné dans lequel on doit rechercher le maximum de la fonction objectif $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Sur cet ensemble borné, la fonction objectif reste bornée, et il existe donc un maximum. Alors que lorsqu'on ne considère pas la contrainte, l'expression $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ peut être aussi grande que l'on veut. Ceci justifie que la contrainte de ces programmes sont toujours saturées.

Le fait d'avoir formellement une expression différente de la fonction g dans la définition de la contrainte, conduit-il à avoir des points stationnaires différents ? On a formellement pour ces trois programmes les fonctions

exprimant la contrainte

$$g^A = (12 - 2x_1 - 3x_2)^{\frac{1}{2}} \qquad g^B = 12 - 2x_1 - 3x_2 = \left(g^A\right)^2 \qquad g^C = (12 - 2x_1 - 3x_2)^2 = \left(g^A\right)^4$$

On rappelle que les points stationnaires sont tels que la contrainte est saturée (ce qui conduit à la même condition, comme on l'a déjà remarqué) et tels que la FOC $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$, que l'on peut encore écrire, donné que dans notre cas $f_2 \neq 0$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2},$$

est satisfaite. Il faut donc s'assurer que cette condition s'écrit pareillement, c-a-d que le membre de droite est le même quand on prend respectivement $g = g^A$, $g = g^B$ puis $g = g^C$. On démontre cela en appliquant les règles de dérivation des fonctions composées.

dans le cas $g = g^B = \left(g^A\right)^2$

$$g_1^B = 2g^A * g_1^A \qquad g_2^B = 2g^A * g_2^A \qquad \text{d'où l'on déduit } \frac{g_1^B}{g_2^B} = \frac{g_1^A}{g_2^A}$$

dans le cas $g = g^C = \left(g^A\right)^4$

$$g_1^C = 4g^A * g_1^A \qquad g_2^C = 4g^A * g_2^A \qquad \text{d'où l'on déduit } \frac{g_1^C}{g_2^C} = \frac{g_1^A}{g_2^A}$$

3) Rechercher les points stationnaires des programme A, B, C [On supposera établi le résultat de la question précédente]

On recherche par exemple les points stationnaires du programme B. Ce/Ces points sont caractérisés par l'équation de la contrainte saturée, d'une part et par l'équation $\frac{f_1}{g_1^B} = \frac{f_2}{g_2^B}$ d'autre part. Cette deuxième équation s'écrit

$$\frac{1/2\sqrt{x_1}}{1/2\sqrt{x_2}} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow 3\sqrt{x_2} = 2\sqrt{x_1} \Longleftrightarrow x_2 = \frac{4}{9}x_1$$

Le système d'équation à résoudre est donc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ x_2 &= \frac{4}{9}x_1 \end{cases}$$

dont on vérifie que la solution unique est

$$x_1 = \frac{18}{5} \qquad x_2 = \frac{8}{5}$$

4) Résoudre la programme A par le critère f et g fonctions concaves

Il reste donc à démontrer que le point stationnaire $(x_1, x_2) = \left(\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right)$ est bien la solution du programme A. L'énoncé nous guide, en nous suggérant d'appliquer le critère f et g concave. En effet, si l'on démontre que f et g sont concaves, alors le point stationnaire sera bien la solution du programme considéré. On rappelle pour démontrer qu'une fonction de deux variable est concave, il faut que les deux dérivées secondes soient négatives, et que l'expression du déterminant de la matrice Hessienne est positif. Il est donc nécessaire à cet effet de calculer cinq dérivées

Concavité de la fonction $f = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

Les cinq dérivées à calculer sont f_1, f_{11}, f_2, f_{22}, et f_{12}, puis l'expression $f_{11}f_{22} - (f_{12})^2$

$$f_1 = \frac{1}{2}(x_1)^{-\frac{1}{2}} \; f_{11} = -\frac{1}{4}(x_1)^{-\frac{2}{2}} \; f_2 = \frac{1}{2}(x_2)^{-\frac{1}{2}} \; f_{22} = -\frac{1}{4}(x_2)^{-\frac{3}{2}} \; f_{12} = 0$$

Il en ressort que $f_{11} < 0$, $f_{22} < 0$, et que $f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 > 0$, ce qui démontre que la fonction f est concave.

Concavité de la fonction $g = \sqrt{12 - 2x_1 - 3x_2}$

Les cinq dérivées à calculer sont g_1, g_{11}, g_2, g_{22}, et g_{12}, puis l'expression $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$

$$g_1 = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}} * -2 \quad g_{11} = -\frac{1}{4}(g)^{-\frac{3}{2}} * -2 * -2 \quad g_2 = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}} * -3 \quad g_{22} = -\frac{1}{4}(g)^{-\frac{3}{2}} * -3 * -3 \quad g_{12} = -\frac{1}{4}(g)^{-\frac{3}{2}} * -2 * -3$$

Il en ressort que $g_{11} < 0$, $g_{22} < 0$, et que $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = +\frac{1}{16}g^3\left[4 * 9 - 6^2\right] = 0 \geq 0$, ce qui démontre que la fonction g est concave.

Les conditions sont remplies pour l'utilisation du théorème qui indique qu'un point stationnaire est la solution du programme $\max\ f\ s.c.\ g \geq 0$ quand f et g sont concaves.

5) Résoudre la programme B par le critère f, fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe

Il reste donc à démontrer que le point stationnaire $(x_1, x_2) = \left(\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right)$ est bien la solution du programme B. L'énoncé nous guide, en nous suggérant d'appliquer le critère f fonction quasi-concave et l'ensemble $g \geq 0$ ensemble convexe. En effet, si l'on démontre queces deux conditions sont satisfaites, alors le point stationnaire sera bien la solution du programme considéré. On rappelle pour démontrer qu'une fonction de deux variable est quasi-concave, il faut que ses courbes de niveau (ou courbes d'indifférence) soient convexes. Il suffit aussi de vérifier l'ensemble des cinq conditions $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$, $f_{11} \leq 0$, $f_{22} \leq 0$ et $f_{12} \geq 0$ sont vérifiées.

Quasi-concavité de la fonction $f = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

Les cinq dérivées à calculer sont f_1, f_{11}, f_2, f_{22}, et f_{12}.

$$f_1 = \frac{1}{2}(x_1)^{-\frac{1}{2}} \;\; f_{11} = -\frac{1}{4}(x_1)^{-\frac{2}{2}} \;\; f_2 = \frac{1}{2}(x_2)^{-\frac{1}{2}} \;\; f_{22} = -\frac{1}{4}(x_2)^{-\frac{3}{2}} \;\; f_{12} = 0$$

Il en ressort que les cinq conditions suffisantes pour une fonction quasi-concaves sont vérifiées, ce qui démontre que la fonction f est quasi-concave.

Convexité de l'ensemble $g = 12 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0$

Cet ensemble est bien connu, on peut encore l'écrire $2x_2 + 3x_2 \leq 12$, c'est dans l'espace de consommation $x_1\ x_2$ un triangle délimité par l'axe horizontal, par l'axe vertical, et par la droite décroissante d'équation $2x_2 + 3x_2 = 12$. Il est connu qu'un triangle est un ensemble convexe.

6) Remarquer que les programmes A et C sont aussi résolus par le critère f fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe.

C'est immédiat. Dans les trois programmes A, B, C la fonction objectif est la même, on vient de démontrer dans la question précédente qu'elle est quasi-concave. Par ailleurs, on a montré dans la première question que l'ensemble caractérisé par la contrainte était identique dans les trois programmes A, B, C. On vient de démontrer que cet ensemble est convexe. Le critère f fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe s'applique donc !

2 Coût d'une firme utilisant plusieurs inputs

On considère dans une première partie une firme qui produit avec la technologie $y = \sqrt{K}\sqrt{L}$. On supposant que le coût du travail est w, que le coût du capital est k.

1) Définir et calculer la fonction de coût $C(y)$. Comme pour le faire, vous avez défini la fonction $C(y)$ par un programme d'optimisation, n'oubliez pas en le résolvant de vérifier en particulier les conditions secondes.

Quand une firme utilise une technologie K, L, le coût qu'elle subit est le coût de ses facteurs de production

$$C(K, L) = kK + wL,$$

C'est une fonction de K et L. La fonction de coût $C(y)$ résulte de décisions de gestion, qunad à la production de y : quand on veut produire y, quelle est la meilleure combinaison des facteurs de production à utiliser ? Il s'agit de produire au coût le plus bas possible. Ainsi, qund elle produit y, la firme doit auparavant résoudre le

programme

$$\min_{K,L} \quad kK + wL$$
$$s.c. \quad \sqrt{K}\sqrt{L} \geq y$$

Programme que l'on peut écrire

$$\max_{K,L} \quad -kK - wL$$
$$s.c. \quad \sqrt{K}\sqrt{L} \geq y$$

La contrainte est saturée : on ne choisirait pas de produire plus que y pour minimiser le coûts !
Pour calculer les FOC, on calcule les dérivées premières de $f = -kK - wL$ et de $g = \sqrt{K}\sqrt{L} - y$ par rapport à K et L :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = -k \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial L} = -w \tag{2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial K} = \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} \tag{3}$$
$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} \tag{4}$$

Les conditions premières $f_K/g_K = f_L/g_L$ s'écrivent

$$-k\frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = -w\frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{K}},$$

condition qui se simplifie en s'écrivant de manière équivalente :

$$kK = wL$$

La meilleure combinaison de facteur est la solution du système

$$\begin{cases} \sqrt{K}\sqrt{L} & = y \\ kK & = wL \end{cases} \iff \begin{cases} KL & = y^2 \\ L & = \frac{k}{w}K \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{k}{w}K^2 & = y^2 \\ L & = \frac{k}{w}K \end{cases} \iff \begin{cases} K & = y\sqrt{\frac{w}{k}} \\ L & = y\sqrt{\frac{k}{w}} \end{cases}$$

Le coût optimal est donc :

$$C(y) = ky\sqrt{\frac{w}{k}} + wy\sqrt{\frac{k}{w}} = 2y\sqrt{k}\sqrt{w}$$

A propos des conditions secondes, il est immédiat que la fonction objectif étant linéaire, elle est quasi-concave. On devrait pouvoir vérifier que la contrainte définit un ensemble de production convexe.
Ensemble de production convexe, Il faut démontrer que dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $\{(K, L)/\sqrt{K}\sqrt{L} \geq y\}$ est convexe, cad que l'ensemble $\{(K, L)/KL \geq y^2\}$ est convexe. Cela ressemble à la question 3 de la partie précédente. On peut transposer l'argument. Je propose ici une autre manière de le vérifier. Il nous faut vérifier que si (K_1, L_1) et (K_2, L_2) appartiennent à cet ensemble alors $(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2, \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2)$ appartiennent à cet ensemble. cad que $(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) * (\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) \geq y^2$. Or :

$$(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) * (\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) = \alpha^2 K_1 L_1 + (1-\alpha)^2 K_2 L_2 + \alpha(1-\alpha)\left[K_1 L_2 + K_2 L_1\right] \tag{5}$$
$$\geq \alpha^2 y + (1-\alpha)^2 y + \alpha(1-\alpha)\left[\frac{L_2}{L_1} + \frac{L_1}{L_2}\right] y \tag{6}$$
$$\geq \alpha^2 y + (1-\alpha)^2 y + 2\alpha(1-\alpha) y \tag{7}$$
$$= y \tag{8}$$

En effet, l'inégalité (??) s'obtient en utilisant successivement les inéglités $K_1L_1 \geq y$, $K_2L_2 \geq y$, $K_1 \geq y/L_1$ et $K_2 \geq y/L_2$.
L'inégalité (??) s'obtient en utilisant le fait bien connu que pour tout réel positif la somme de ce réel positif et de son inverse (ici $\frac{L_2}{L_1}$ et $\frac{L_1}{L_2}$) est toujours supérieure ou égale à 2.
L'inégalité (??) s'obtient en utilisant l'identité remarquable bien connue $\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha) = 1$
CQFD

On considère dans une seconde partie une firme qui produit avec la technologie $y = K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3}$, T désignant dans une économie agricole la terre. On notera ℓ le coût de la terre (ℓ pour loyer).

2) Calculer la fonction de coût $C(y)$. On vérifiera si nécessaire les conditions secondes, en admettant pour tout $\alpha \in [0,1], x \in \mathbb{R}_+$ que $\alpha x + (1-\alpha)\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, et que pour tout $\alpha \in [0,1] \alpha^3 + (1-\alpha)^3 + 6(\alpha)^{3/2}(1-\alpha)^{3/2} \geq 1$.
Le programme ordinaire de gestion quand une firme utilise une technologie K, L, T est :

$$\begin{aligned} \min_{K,L,T} \quad & kK + wL + \ell T \\ s.c. \quad & K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3} \geq y \end{aligned}$$

Programme que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \quad & -kK - wL - \ell T \\ s.c. \quad & K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3} \geq y \end{aligned}$$

La contrainte est saturée : on ne choisirait pas de produire plus que y pour minimiser les coûts !
Pour calculer les FOC, on calcule les dérivées premières de $f = -kK - wL - \ell T$ et de $g = K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3} - y$ par rapport à K et L :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = -k \tag{9}$$
$$\frac{\partial f}{\partial L} = -w \tag{10}$$
$$\frac{\partial f}{\partial L} = -\ell \tag{11}$$
$$\frac{\partial g}{\partial K} = \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{1/3}T^{1/3} \tag{12}$$
$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{1}{3}K^{1/3}L^{-2/3}T^{1/3} \tag{13}$$
$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{1}{3}K^{1/3}L^{1/3}T^{-2/3} \tag{14}$$

Les conditions premières $f_K/g_K = f_L/g_L = f_T/g_T$ s'écrivent

$$3kK^{2/3}L^{-1/3}T^{-1/3} = 3wK^{-1/3}L^{2/3}T^{-1/3} = 3\ell K^{-1/3}L^{-1/3}T^{2/3}$$

conditions qui en fait sont deux conditions que l'on peut écrire

$$3kK^{2/3}L^{-1/3}T^{-1/3} = 3wK^{-1/3}L^{2/3}T^{-1/3} 3kK^{2/3}L^{-1/3}T^{-1/3} \qquad = 3\ell K^{-1/3}L^{-1/3}T^{2/3}$$

ce qui se simplifie en s'écrivant de manière équivalente :

$$\begin{aligned} kK &= wL \\ kK &= \ell T \end{aligned}$$

ou encore

$$L = \frac{k}{w}K$$
$$T = \frac{k}{\ell}K$$

La meilleure combinaison de facteur est la solution du système

$$\begin{cases} K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3} & = y \\ L & = \frac{k}{w}K \\ T & = \frac{k}{\ell}K \end{cases}$$

La première équation s'écrit, après substitution

$$K\left(\frac{k}{w}\frac{k}{\ell}\right)^{1/3} = y \Longleftrightarrow K = y\left(\frac{w\ell}{k^2}\right)^{1/3}$$

On trouve donc les facteurs optimaux de production

$$K = y\left(\frac{w\ell}{k^2}\right)^{1/3}$$
$$L = y\left(\frac{k\ell}{w^2}\right)^{1/3}$$
$$T = y\left(\frac{kw}{\ell^2}\right)^{1/3}$$

Le coût optimal est donc :

$$C(y) = y\left(k\left(\frac{w\ell}{k^2}\right)^{1/3} + w\left(\frac{k\ell}{w^2}\right)^{1/3} + \ell\left(\frac{kw}{\ell^2}\right)^{1/3}\right) = 3y(kw\ell)^{1/3}$$

A propos des conditions secondes, il est immédiat que la fonction objectif étant linéaire, elle est quasi-concave. On devrait pouvoir vérifier que la contrainte définit un ensemble de production convexe.

Ensemble de production convexe, Il faut démontrer que dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $\{(K, L, T)/K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3} \geq y\}$ est convexe, cad que l'ensemble $\{(K, L, T)/KLT \geq y^3\}$ est convexe. Cela ressemble à la question 2 précédente. On peut transposer l'argument. Il nous faut vérifier que si (K_1, L_1, T_1) et (K_2, L_2, T_2) appartiennent à cet ensemble alors $(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2, \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2, \alpha T_1 + (1-\alpha)T_2)$ appartient à cet ensemble. cad que $(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) * (\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) * (\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2) \geq y^3$. Notons $Prod = (\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) * (\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) * (\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2)$ ce produit. On a :

$$Prod = \alpha^3 K_1L_1T_1 + (1-\alpha)^3 K_2L_2T_2 + \alpha^2(1-\alpha)\left[K_1L_1T_2 + K_1L_2T_1 + K_2L_1T_1\right] + \alpha(1-\alpha)^2\left[K_1L_2T_2 + K_2L_1T_2 + K_2L_2T_1\right]$$
$$\geq \alpha^3 y + (1-\alpha)^3 y + \alpha^2(1-\alpha)y[\frac{T_2}{T_1} + \frac{L_2}{L_1} + \frac{K_2}{K_1}] + \alpha(1-\alpha)^2[\frac{K_1}{K_2} + \frac{L_1}{L_2} + \frac{T_1}{T_2} + \tag{15}$$
$$\geq \alpha^3 y + (1-\alpha)^3 y + \alpha(1-\alpha)y\left[\left[\alpha\frac{L_2}{L_1} + (1-\alpha)\frac{L_1}{L_2}\right] + \left[\alpha\frac{K_2}{K_1} + (1-\alpha)\frac{K_1}{K_2}\right] + \left[\alpha\frac{T_2}{T_1} + (1-\alpha)\frac{T_1}{T_2}\right]\right] \tag{16}$$
$$\geq \alpha^3 y + (1-\alpha)^3 y + \alpha(1-\alpha)y\left[2\sqrt{\alpha(1-\alpha)} + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)} + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right] \tag{17}$$
$$\geq y\left(\alpha^3 + (1-\alpha)^3 + 6(\alpha)^{3/2}(1-\alpha)^{3/2}\right) \tag{18}$$
$$\geq y \tag{19}$$

En effet, l'inégalité (??) s'obtient en utilisant successivement les inéglités $K_1L_1T_1 \geq y$, $K_2L_2T_2 \geq y$, $K_1L_1 \geq y/T_1$, $K_1T_1 \geq y/L_1$, $L_1T_1 \geq y/K_1$, puis $L_2T_2 \geq y/K_2$, $K_2T_2 \geq y/L_2$ et $K_2L_2 \geq y/T_2$.

L'inégalité (??) s'obtient en regroupant les termes deux par deux.

L'inégalité (??) s'obtient en utilisant le fait que pour tout x réel, $\alpha x + (1-\alpha)\dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, reprise de l'énoncé, appliqué successivement à $x = L_2/L_1$, à $x = K_2/K_1$ et à $x = T_2/T_1$

L'inégalité (??) est une simplification,

L'inégalité (??) est l'inégalité admise dans l'énoncé : $\alpha^3 + (1-\alpha)^3 + 6(\alpha)^{3/2}(1-\alpha)^{3/2} \geq 1$.

CQFD

Fin du corrigé du TD 7