Université de TOURS - L1 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Enoncé du TD n° 7 - groupe 127

Optimisation avec contrainte : l'examen des conditions secondes

Automne 2021

On suppose acquis la recherche des points stationnaires du programme $\max_{x,y}\ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ *lorsque la contrainte est saturée. Ce TD permet d'étudier sérieusement les conditions selon lesquelles on pouua conclure que le/les points stationnaires calculés sont ou non les solutions du programme d'optimisation.*

Critère f et g, fonctions concaves Etant donné (x,y) un point stationnaire du programme $\max_{x,y}\ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ qui sature la contrainte ($g(x,y) > 0$), alors si f et g sont concaves, c'est une solution du programme. Plus précisément, étant donné f et g *concaves*, alors, (x^*,y^*) intérieur au domaine maximise $f(x,y)$ s.c. $g(x,y) \geq 0$ si et seulement si (x^*,y^*) est stationnaire.	**Critère f fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe** Etant donné (x,y) un point stationnaire du programme $\max_{x,y}\ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ qui sature la contrainte ($g(x,y) > 0$), alors si f est quasiconcave et si l'ensemble $\{g(x,y) \geq 0\}$ est convexe, c'est une solution du programme. Plus précisément, étant donné f *quasiconcave*, si l'ensemble $g(x,y) \geq 0$ est convexe, alors (x^*,y^*) intérieur au domaine maximise $f(x,y)$ s.c. $g(x,y) = 0$ si et seulement si (x^*,y^*) est stationnaire.	**Critère f et g fonctions quasi-concaves et existence d'un hyperplan qui sépare f et g** Etant donné deux fonctions f et g quasi-concaves, on dit que (x^*,y^*) maximise $f(x,y)$ s.c. $g(x,y) \geq 0$ si et seulement si il existe un vecteur (p_x,p_y) tels que (x^*,y^*) maximise $p_x x + p_y y$ sous la contrainte $g(x,y) \geq 0$ (x^*,y^*) minimise $p_x x + p_y y$ sous la contrainte $f(x,y) \geq f(x^*,y^*)$ **Autres critères** Dans tous les autres cas, on doit raisonner « à la main » pour comprendre pourquoi la solution des FOCS est bien ou non la solution du programme étudié.
Une fonction f est concave si ses deux dérivées secondes sont négatives et si le déterminant de la matrice Hessienne est positif ou nul. Formellement $f_{11} \leq 0 \qquad f_{22} \leq 0 \quad \text{et} \quad f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 \geq 0$	Une fonction f est quasi-concave si les ensembles de points tels que f conduise à une valeur supérieur à un certain seuil, type $f \geq \alpha$ soit convexe. Un jeu de conditions suffisantes pour avoir une fonction quasi-concave quand $f_1 \geq 0$ et $f_2 \geq 0$ est $f_{11} \leq 0 \qquad f_{22} \leq 0 \quad \text{et} \quad f_{12} \geq 0$	Un ensemble $g \geq 0$ est convexe dès lors que si l'on prend deux points vérifiant $g \geq 0$ alors tous les points du segments entre ces deux points vérifient la même propriété $g \geq 0$. Formellement, $\big(g(x) \geq 0, g(y) \geq 0\big) \Rightarrow g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0 \qquad [\forall \lambda \in [0,1]]$

1 Un même programme, formulé différemment, qui a les mêmes solutions

On considère les programmes suivants, apparemment différents, mais dont on montre qu'ils conduisent aux mêmes solutions, avec des méthodes qui pourraient être différentes

$$A = Max_{x_1,x_2>0} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad s.c. \quad (12 - 2x_1 - 3x_2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$B = Max_{x_1,x_2>0} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad s.c. \quad 12 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0$$

$$C = Max_{x_1,x_2>0} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad s.c. \quad (12 - 2x_1 - 3x_2)^2 \geq 0$$

1) Montrer que les trois programmes sont identiques et en déduire que les solutions recherchées sont les mêmes.

2) Montrer que la contrainte de ces programmes est saturée et que ces programmes ont les mêmes points stationnaires.

3) Rechercher les points stationnaires des programme A, B, C [On supposera établi le résultat de la question précédente]

4) Résoudre la programme A par le critère f et g fonctions concaves

5) Résoudre la programme B par le critère f, fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe

6) Remarquer que les programmes A et C sont aussi résolus par le critère f fonction quasi-concave et $g \geq 0$ ensemble convexe.

2 Coût d'une firme utilisant plusieurs inputs

On considère dans une première partie une firme qui produit avec la technologie $y = \sqrt{K}\sqrt{L}$. On supposant que le coût du travail est w, que le coût du capital est k.

1) Définir et calculer la fonction de coût $C(y)$. Comme pour le faire, vous avez défini la fonction $C(y)$ par un programme d'optimisation, n'oubliez pas en le résolvant de vérifier en particulier les conditions secondes.

On considère dans une seconde partie une firme qui produit avec la technologie $y = K^{1/3}L^{1/3}T^{1/3}$, T désignant dans une économie agricole la terre. On notera ℓ le coût de la terre (ℓ pour loyer).

2) Calculer la fonction de coût $C(y)$. On vérifiera si nécessaire les conditions secondes, en admettant pour tout $\alpha \in [0,1], x \in \mathbb{R}_+$ que $\alpha x + (1-\alpha)\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, et que pour tout $\alpha \in [0,1] \alpha^3 + (1-\alpha)^3 + 6(\alpha)^{3/2}(1-\alpha)^{3/2} \geq 1$.

FIN du sujet du TD n° 7 - groupe 127