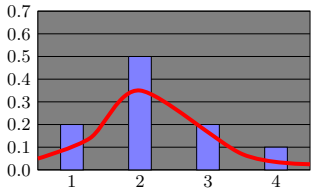
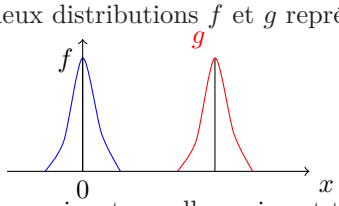
Université de TOURS - L1 Gestion
Cours Mathématiques et Statistiques Appliquées à la Gestion
Enoncé du TD n° 8 - groupe 127
Distributions et statistiques
Automne 2023

Le cours viendra après les TD clore le travail des étudiants. Exceptionnellement, les chargés de TD développeront les savoirs qui sont repris dans l'encadré, et qui correspondent à la première partie du chapitre V, c'est-à-dire la définition d'une distribution, discrète ou continue, l'usage de statistiques pour illustrer/représenter ces distributions, et les critères de dominance stochastique du 1er et du 2nd ordre.

On appelle distribution d'une variable la description de l'ensemble des occurences possibles de cette variable et de la fréquence d'apparition de ces occurences. On distingue les distributions discrètes dans lesquels les évènements sont finis, chacun associés avec une probabilité, des distributions continues, où ce sont les probabilités des intervalles qui sont définies.  Dans le diagramme ci-dessus les fréquences sont reportées sur l'axe vertical, en tuyau d'orgue une distribution discrète, en rouge, une distribution continue.	Les statistiques de position, le *mode*, la *médiane* et la *moyenne* donnent une idée de l'ordre de grandeur de la distribution considérée. le mode est la valeur qui correspond à l'effectif le plus élevé, la médiane, est la valeur qui partage la distribution en deux sous-ensemble d'effectifs égaux. La comparaison de ces 3 caractéristiques de tendance centrale permet de juger de la symétrie de la distribution. Lorsqu'une distribution est telle que le mode est inférieur à la médiane (elle-même inférieure à la moyenne), la distribution est dite *étalée vers la droite* et vice versa.	On dit que la distribution $\mathcal{A}$ domine stochastiquement la distribution $\mathcal{B}$ au premier ordre, si elle rémunère plus que $\mathcal{B}$ dans tous les états de la nature. On dit que la domination est du second ordre, si $\mathcal{B}$ est un spread à moyenne constante de la distribution $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ est un *spread* de $\mathcal{A}$ à moyenne constante si dans la distribution $\mathcal{B}$, on a déplacé du poids du centre de la distribution vers les queues de la distribution.

1 Deux distributions suite à un transfert d'argent

Soit les deux distributions f et g représentées ci-dessous resp. en bleu et en rouge, vérifiant la propriété (0) :



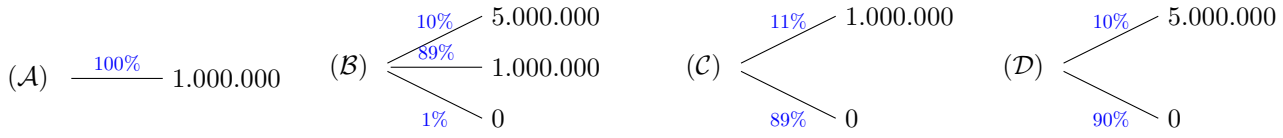
$$\exists\ a > 0\ /\ g(x) = f(x-a) \qquad (0)$$

Dire des affirmations suivantes, celles qui sont toujours Vraies **(V)**, toujours Fausses **(F)** ou, Parfois vraies ou fausses **(P)** ?

1) L'espérance de la distribution de f est toujours supérieure à l'espérance de la distribution de g . . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
2) 0 est l'espérance de f . . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
3) 0 est le mode de f . . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
4) 0 est la médiane de f . . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
5) a est l'espérance de g. . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
6) La variance de f égale la variance de g. . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
7) La distribution g domine stochastiquement la distribution f au premier ordre. . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐
8) La distribution g domine stochastiquement la distribution f au second ordre. . . . . **V** ☐ **F** ☐ **P** ☐

2 Dominance stochastique de premier et de second ordre

On considère dans cet exercice les quatre distributions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ suivantes :



1) Dire s'il existe entre ces distributions -prises deux à deux- des liens de dominance stochastique de premier ordre
2) Dire s'il existe entre ces distributions -prises deux à deux- des liens de dominance stochastique de second ordre

3) Dire intuitivement pourquoi tous les agents rationnels préfèrent une distribution $\mathcal{A}$ à la distribution $\mathcal{C}$ quand $\mathcal{A}$ domine stochastiquement $\mathcal{C}$ au premier ordre.

4) Justifier, lorsque l'on considère une distribution $\mathcal{L}$ dans laquelle il y a de l'alea avec la distribution $\mathcal{S}$ qui consiste à donner de manière sûre la moyenne de $\mathcal{L}$, que $\mathcal{L}$ est un spread à moyenne constante de $\mathcal{S}$.

5) Dire les raisons pour lesquelles un agent pourrait ne pas aimer les spread à moyenne constante.

3 Distribution des Rendements de deux titres financiers

Un investisseur aimerait savoir lequel des deux titres A et B est le plus risqué. En gestion de portefeuille, le risque d'un titre étant souvent caractérisé par la variabilité de son rendement, il doit comparer la variance des rendements des deux titres. À cette fin, il tire un échantillon aléatoire de 8 rendements semestriels pour chacun des deux titres et il obtient comme

Rendements trimestriels								
Titre A	4,2 %	-0,6 %	2,3 %	5,1 %	4,3 %	4,9 %	7,4 %	3,8 %
Titre B	2,5 %	2,2 %	2,8 %	3,0 %	2,8 %	2,6 %	2,8 %	3,2 %

1) Calculer pour chacun de ces titres le rendement moyen

2) Calculer pour chacun de ces titres la variance des rendements

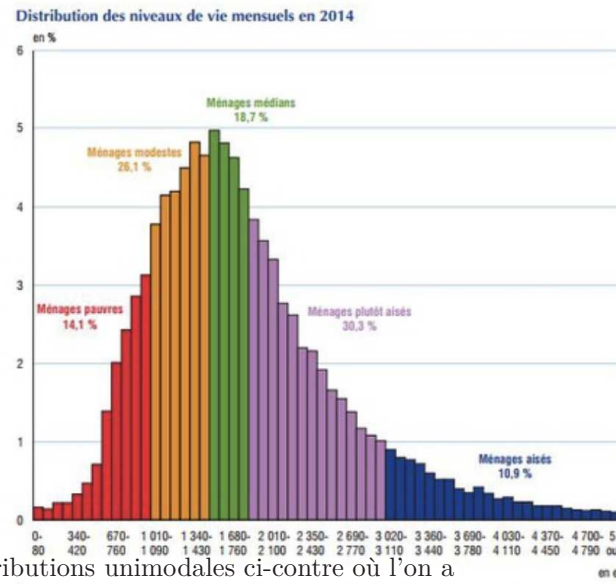
3) Dire sur quel critère on pourrait préférer le titre A et sur quel critère on p

4) Est-ce que le titre B est un spread du titre A ?

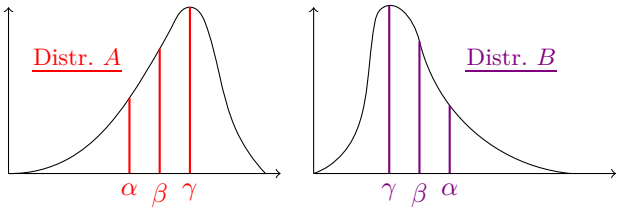
4 Ménages français en 2014

Ci-contre la distribution des revenus des ménages français en 2014, en tuyau d'orgue. Sur l'axe horizontal, chaque tranche de revenu est de 80, sur l'axe vertical le pourcentage de chacune des tranches.

1) Expliquer l'appellation ménages médian pour les tranches de revenu représentées en vert.
2) Donner une approximation des trois quartiles $Q1$, $Q2$ et $Q3$.
3) Développer votre intuition, l'espérance est-elle ci-contre inférieure à la médiane ? Étayer votre propos par une recherche internet.



5 Espérance, Mode, Médiane



Soit les deux distributions unimodales ci-contre où l'on a représenté l'espérance, le mode, la médiane.

1) Indiquer (intuitivement) en A et B si espérance $<$ médiane

2) Avec Tableur trouver $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7$ tels qu'associés aux probas respectives $\frac{3}{20}; \frac{1}{20}; \frac{5}{20}; \frac{2}{20}; \frac{3}{20}; \frac{4}{20}; \frac{2}{20}$ la distribution correspondante vérifie Espérance<mode<médiane.

Fin du sujet du TD n° 8 - groupe 127